

# 國小資源班教師對數學學習障礙學生 運用加法計算策略之省思

林秀真

國立台南大學特殊教育系  
博士生

## 摘要

本文旨在說明數學學習障礙學生與一般生在點數、計算的策略使用差異，與資源班教師因應學生困難所採行的教學方式。根據文獻指出一年級數學學習障礙學生具有直接提取計算事實的困難，未如同一般生呈現策略使用及使用組合策略的轉變過程，多倚重手指點數策略作為主要計算策略，來完成簡單加法的計算。依此，資源班教師提出教學中的觀察，及使用的教學方式，最後提出資源班教學應切合學生困難與需求，並與普通班教師協調的省思。

**關鍵詞：**數學、學習障礙、加法、計算策略

## 壹、前言

學習障礙（以下稱學障）是高異質性群體，當中約有 5%-8% 的學生會出現特定記憶或認知缺陷，影響數學概念或程序的學習(Geary, 2004)。在精神疾病診斷與統計手冊(Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders, DSM)中，第 4 版和第 5 版之間對於學障的名稱和定義有所轉變，從原先第 4 版修正版的學習疾患(learning disorder)，更名為第 5 版的「特

定」學習疾患(specific learning disorder)(孟瑛如、簡吟文, 2014)，筆者認為這樣的修正是希望以特有的、核心的特徵來定義學障。先前的 DSM-IV 看個人能力與學習表現的落差，採差距標準作為鑑定基準(李俊仁, 2017)。新版的 DSM-5 以核心缺陷的認定取而代之(連文宏、洪儷瑜, 2017)，將計算困難列為數學學習障礙(mathematics learning disabilities, MLD)的診斷特徵之一，作為學障其中的一個亞型。

觀察普通班教師進行國小一年級（以下簡稱小一）個位數加法單元時，會先針

對數字與數量設計教學活動，再進行比較數字大小的教學，爾後採「從大數開始數」的策略對全班進行個位數加法教學，並要求學生記憶基本計算事實，以心算卡反覆練習直接提取計算事實，做為之後加法的主要計算策略。

連文宏、洪麗瑜（2017）指出數學學習障礙的核心缺陷能力之一，在於計算與提取基本計算事實(basic arithmetic facts)困難。筆者在教學現場觀察到，經鑑輔會鑑定為數學學習障礙的學生，即使經過普通班教學與密集練習後，在計算過程仍會呈現需要點數手指、易錯誤，或是需時較久的特徵。顯示普通班的教學方式對於數學學習障礙學生可能成效不明顯，抑或是可能不切合數學學習障礙學生的困難與需求。

國內外學者均指出數學學習障礙學生具有直接提取能力缺陷，即使經過大量練習亦無法直接提取加法計算事實，若使用直接提取策略不僅反應時間久，錯誤率更高達 89%（李俊仁，2017；呂偉白，2017；Geary, 2004；Geary, Hoard & Baliey, 2011）。Fuchs 等人（2009）提出具有數學學習障礙、閱讀障礙共病的數學學習障礙學生，在直接提取答案所需時間較單純數學學習障礙學生更久。現行資源班中的數學學習障礙學生，以數學障礙、閱讀障礙共病（以下簡稱數閱障共病）的類型較多，筆者觀察此類別的小一學生在經過普通班教學後，仍無法透過反覆練習心算卡的方式，來直接提取加法計算事實，提取過程不僅耗時久且錯誤多，最後仍須以手指點

數策略完成計算。

為此，本文先說明一般生與數學學習障礙學生在點數 (counting) 與計算 (arithmetic) 策略使用上的差異，再以實務教師的觀點，比對教學現場中的觀察，為切合數學學習障礙學生的學習困難與需求，提出教學方式與省思。

## 貳、點數的原則與計算的策略

要完成一年級數學簡單加法計算，需要使用點數原則與計算策略。以下說明一般生與數學學習障礙學生在兩者間的差異。

### 一、點數的五大原則

根據兒童發展，早期的點數概念有以下五大原則（李俊仁，2017；Geary, 2004；Geary, Hoard, Craven, & Desoto, 2004）：

1. 一對一對應原則  
(one to one corresponded principle)  
每個東西只能點數一次，一個數字對應一個東西，不會重複點數。
2. 穩定順序原則 (stable order principle)  
點數的數字順序是穩定不變的。
3. 基數原則 (cardinal principle)  
知道點數到的最後一個數字，就是代表東西全部的總量。
4. 抽象原則 (abstract principle)  
任何東西、物品都可以拿來點數。
5. 順序無關原則  
(order irrelevance principle)  
東西的數量不會受到點數順序的影響，亦即不按照東西排列的順序點數，數完

也可以知道東西的總量。

以上一對一對應原則、穩定順序原則、基數原則是如何數的基本原則，抽象原則、順序無關原則是彈性原則(李俊仁，2017)，視兒童發展出現。

相對於一般生，數學學習障礙學生在點數的表現上則有所差異。Geary (2004)提到數學學習障礙學生在穩定順序原則及基數原則的理解及表現最好，在順序無關原則與鄰接原則(adjacency rule)的表現會呈現持續錯誤。Geary、Thomas 和 Yao (1992)以木偶點數物品的測驗來判定學生是否知道如何點數，及對點數知識的理解，再比較並提出一年級數學學習障礙學生和一般生在點數行為及知識理解有兩點差異：(1)偽錯誤(pseudoerror)和(2)錯誤(error)。偽錯誤指的是，當木偶先數序列物品中的第 1、3、5 個，再數第 2、4、6 個，數學學習障礙學生會判定這樣的點數行為是錯誤的。但就點數的無關順序原則而言，這樣的點數行為是無誤的，僅是違反鄰接原則。

錯誤的地方在於，數學學習障礙學生會重複點數第一個或是最後一個東西。即使到了二年級，很多數學學習障礙學生還是不完全理解點數概念(Geary et al., 2004)。例如點數五個東西，會把第一個東西念 1、2 重複點數兩次，或是將最後一個東西念 5、6 重複點兩次數，數完認為共有六個東西。雖然數學學習障礙學生知道點數知識中的一對一對應原則，但仍會出現重複點數的錯誤，這是因為在處理訊息的過程中，工作記憶無法有效監控點數行為

所造成。對應筆者在教學現場的觀察，一年級學生在計算簡單加法，如  $5+2$ ，在雙手比出 5 和 2 要計算總數時候，會折下第一根手指，同時數 1、2，再接著依序數 3、4……直到 8，寫下答案 8，呈現重複點數的錯誤。

## 二、計算的四個策略

一年級學生會依照對點數知識及計算行為的發展，採用不同或是組合多種策略來進行簡單加法的計算。可能透過的媒介有視覺性的半具體圖像，如畫圈點數總數；或是透過比手指頭相加計算答案，稱為手指點數策略(finger counting strategy)；又或是不比手指，僅用語音進行點數，稱為語音點數策略(verbal counting strategy) (Siegler & Shrager, 引自 Geary et al., 2004)。

國內外學者提出加法計算策略可以分為以下幾種(李俊仁，2017；Goldman, Pellegrino, & Mertz, 1988；Geary et al., 2004)：

### 1. 全數(counting all 或 sum procedure)

先呈現兩邊數量，然後從 1 開始全部數到完。例如  $3+4$ ，一隻手比 3，一隻手比 4，然後從 1 開始數到 7，完成  $3+4=7$  的計算。Geary (2004)指出此策略是一開始學加法最先採用的策略。

### 2. 從某數開始數(counting on)

此策略再分為(1)依據數字位置判斷，從前面數字開始數(counting from first)，和(2)先判斷數字大小，再從大數開始數(counting from max 或 min procedure)，和(3)先判斷數字大小，再從

小數開始數(max procedure)三個策略。

(1) 從前面數字開始數(counting from first)

以數字在算式中的位置區分計算順序，將被加數視為前面的數，加數視為後面的數。從算式的被加數開始計算，把後面的加數累加上去，例如  $3+4$ ，從 3 開始往上數 4 個數 4、5、6、7，完成  $3+4=7$  的計算。

(2) 從大數開始數 (counting from max 或 min counting)

依據算式中數字的大小區分計算順序。從算式中較大的數字開始計算，把較小的數字累加上去。例如  $3+4$ ，從較大的 4 開始計算，開始往上數 5、6、7 累加三個數，完成  $3+4=7$  的計算。此方式也被視為是較常使用與較有效率的計算方式 (Goldman et al., 1988)。

(3) 從小數開始數(max procedure)

依據算式中數字的大小區分計算順序。從算式中較小的數字開始計算，把較大的數字累加上去。例如  $3+4$ ，從較小的 3 開始計算，開始往上數 4、5、6、7 累加四個數，完成  $3+4=7$  的計算。

不論是全數或是從某數開始數的方式，都可以使用手指點數策略或語音點數策略。

### 3. 直接提取(direct retrieval)

亦即不需要經過任何形式的計算，直接從長期記憶中檢索答案。例如計算  $3+4$ ，可以直接回答 7，不需要經過手指點數或是語音點數。直接提取策略通常用於 10 以內的加法，直接提取基本計算事實。

在國小三年級已成為一般生的主要計算策略 (Geary et al., 2004)。

### 4. 分解 (decomposition)

計算過程會先把數字拆解成兩數，直接提取部分總和再加上某數完成計算。例如計算  $6+7$ ，先會將 7 分解成 6 和 1，以直接提取的方式先計算  $6+6=12$ ，再加上 1，算出  $6+7=13$ 。

點數策略的使用也反應出以記憶為本位問題解決過程(memory-based problem solving processes)的發展階段(Geary et al., 2004)。直接提取和分解這兩個策略，是在問題解決過程中從長期記憶直接檢索出答案，達到自動化解題，減輕工作記憶的負荷(Geary, 2004; Geary et al., 2004)。

Russell 和 Ginsburg 於 1984 年指出，四年級數學學習障礙學生相較於一般生，能直接提取的基本計算事實很少，雖然能如一般生使用其他策略，但在工作記憶執行過程中會有很多錯誤 (引自 Geary et al., 2004)。一般生隨著計算策略的成熟，能使用和組合不同策略來快速解題(Geary, 2004)，加上提取長期記憶作為有效率的解題策略，配合精熟練習達到自動化，使得解題速度更快，工作記憶負擔更少，用以解決更複雜的問題。比起同齡的一般生，學障生大部分的發展都顯得較為緩慢 (Goldman et al., 1988)，而數學學習障礙學生比起一般生約延遲兩個年級才出現使用組合策略(Geary et al., 2004)。

一年級數學學習障礙學生和一般生在策略的使用上有很大的差異，即使到了五年級，也還有 25%的數學學習障礙學生依

賴手指點數來計算簡單加法問題，一般生大部分都使用組合策略，如同時使用直接提取和分解等策略，僅有 6%使用手指點數(Geary, 2004; Geary et al., 2004)。顯見手指點數策略是數學學習障礙學生倚重的計算策略。

## 參、資源班教師的教學方式與省思

### 一、教學方式

Landerl、Bevan 和 Butterworth (2004) 指出數學學習障礙學生具有數字處理過程的缺陷，比較數字大小反應慢，無法自動化排序數字，直覺數感(subitizing)的判斷力差。Geary (2004)指出比起一般生，數學學習障礙學生較晚開始使用從大數開始數的策略，且使用起來錯誤多。因此在面對加法計算多半採用畫圈點數或是全部數策略，但此方式無法類化處理之後大數字的計算問題，例如  $25+12$ 。若要求其採用班級教學的「從大數開始數」策略來計算加法，不僅辨識數字大小速度慢，錯誤率亦高。

研究指出數學學習障礙學生和一般生的差異，在於計算策略的組合使用、使用精準度和轉換的過程(Geary, 2004; Goldman et al., 1988)。低年級數學學習障礙學生會高頻率使用「全部數」策略，使用「語音點數」策略容易出現錯誤；一般生會從「手指點數」策略轉變為使用「從大數開始數」策略及「直接提取」策略，且少有錯誤。亦即一般生會改變所使用的

計算策略，而數學學習障礙學生沒有呈現相同的轉變。

Fuchs 等人(2009)提出數閱障共病的數學學習障礙學生與單純數學學習障礙學生，在重複練習點數策略的加法教學中，都能獲得不同程度的效益。意即「點數」策略教學對數學學習障礙學生在學習加法上是有效的學習策略，不論其是否併合閱讀障礙，資源班可視學生困難及需求，應用「點數」策略作為簡單加法的教學策略之一。Goldman 等人(1988)提出，數學學習障礙學生即使練習「從大數開始數」的計算策略，作答反應時間仍舊較一般生長，即使持續練習該策略，亦無法如一般生呈現使用策略的轉變，改為使用「直接提取」策略完成加法計算。

Geary 等人(2004)指出數學學習障礙學生依賴「手指點數」策略來計算簡單加法問題，連文宏、洪儷瑜(2017)提出不同亞型的數學學習障礙學生使用的策略亦不同：單純的數學學習障礙學生較易使用「從大數開始數」的策略，數閱障共病的數學學習障礙學生則仍停留在「從前面數字開始數」的策略。兩個策略都有助於學生計算答案，兩者間的差異在於計算速度，不影響計算正確率。


在學生無法由長期記憶中直接提取答案，或使用「從大數開始數」等有效率的策略，但又具有必須學習且正確計算簡單加法的學習需求之下，此時就需要明確且適切的學習步驟。資源班的數學學習障礙學生多為數閱障共病的亞型，為兼顧學生發展現況及學習內容，筆者在教學現場參

考「從前面數字開始數」的策略，使用手指點數，作為小一簡單加法計算的教學步驟。

此方式是以數字在算式中的位置作為區分。被加數作為「前面的」數字，加數作為「後面的」數字。皆固定手比被加數，眼睛看加數，不論是橫式或直式算式，都可依照步驟進行計算。

計算共分三個步驟：1.手比出被加數，2.眼睛看加數，3.邊念數字邊折手指，往上數上去。以簡單加法  $5+3$  為例，5 為被加數，手比出 5；3 為加數，眼睛看著 3，邊折手指邊以口語數出 4、5、6、7、8，完成  $5+3=8$  的簡單加法計算。計算步驟如表一。

表 1  
以簡單加法  $5+3$  為例的計算步驟

	算式	
	橫式	直式
	$5+3=$	$\begin{array}{r} 5 \\ +3 \\ \hline \end{array}$
計算步驟	1.手比 5  2.眼睛看著 3 3.嘴巴念 4、5、6、7、8（邊念邊折下手指） 完成計算 $5+3=8$ 。	

註：簡單加法  $5+3$ ，5 為被加數，手比出 5；3 為加數，眼睛看著 3。

此方式在教學現場讓學生改變邊折手指邊數的口語後，就可類化到個位數減法計算。例如  $5-3$  的個位數減法，改變第 3 步驟嘴巴念，就可以類化完成計算。計算步驟：1.手比 5 礮，2.眼睛看著 3，3.嘴巴念減 1、減 2、減 3（邊念邊折下手指），完成計算  $5-3=2$ 。

反覆練習及精熟明確的計算步驟，除了能帶來成功經驗，提昇學習意願與動機，待自動化之後能減輕認知負荷，亦能協助學生類化至減法計算與複雜計算，例

如察覺需要借位的題型，避免出現  $21-8=27$  的錯誤類型。

## 二、教學省思

Goldman 等人（1988）提出學障生在解決問題的時候，存在反應時間久，採取低效率解決方式的現象。上述兩種計算策略的差異在於，從大數開始數是較為精緻化且有效率的策略。因為數學學習障礙學生具有直覺數感的能力缺陷，造成使用大數開始數的策略困難，在教學現場中，如何設計教學讓數學學習障礙學生可以使用

有效率的策略，可列為資源班教師未來教學的重要目標之一。

因為數學學習障礙學生在學習及記憶基本計算事實有困難，且策略的組合使用與直接提取能力皆較緩慢，因此不一定能與班級同儕使用相同的組合策略，或是以班級所教學的策略來正確計算。在這樣的現況下，資源班符應學生需求所進行的明確步驟教學更顯重要。在達到自動化後，除了可以完成正確計算的教學目標，更有助學生挹注更多的認知資源於其他方面學習。資源班教師身處教學現場，在使用理論原則作為教學方法的同時，更要以學生能力及其特殊需求為重要前提，教導適用方式，讓學生可以獲取成功經驗建立信心，累積所得的經驗亦會反饋強化計算流暢性，提昇數學能力。

資源班教學因以學生需求為前提，有時不一定與原班級統一的教學方式相同，學生可能會混淆原班級與資源班的教學方式，面對題目會呆立許久，不確定要用哪一個策略，或是無法正確判斷大數，但從前面數字開始數的時候又顯得不熟悉錯誤連連，改以畫圈點數完成計算。促進學生適應與銜接原班級課程為資源班教師努力的目標之一。因此，在實際教學與應用時，資源班教師要留意學生是否混淆兩邊策略，造成學習反效果。

鈕文英（2015）指出，在融合教育與全方位課程的思潮下，普通班教師與資源班教師可協同應用修整原則與多元表徵的學習路徑，來符應班上每一位學生的需求，進而為每個孩子提供適切且需要的學

習策略。因此，筆者除觀察學生學習狀況與需求，亦積極聯繫普通班教師，說明學生學習需求、資源班的調整方式與策略成效。筆者的溝通經驗中，多數普通班教師亦願意以「從前面開始數」的策略個別指導該生完成課堂練習，給予學生上台作答展現的機會。亦有普通班教師會以此方式進行全班教學，提供班級中有類似需求的其他學生，作為另一個學習方法的選擇。

## 肆、結論

在異質性很高的學障群體中，有一群計算困難的數學學習障礙學生，在學習計算時表現出，耗時久、錯誤多、使用低效率的策略，並呈現記憶基本計算事實困難。身為資源班教師在參酌理論原則的同時，將學生的需求與困難列為前提，設計適切的教學內容與明確的學習步驟是重要且必要的。如何應用理論再設計教學活動，教導學生學習及使用更有效率的策略，是實務教師未來重要的目標。

## 參考文獻

- 呂偉白（2017）。數學學習障礙與閱讀障礙共病的認知缺陷研究回顧。載於詹士宜、楊淑蘭（主編），**突破數學學習困難：理論與實務**（39-60頁）。臺北市：心理。
- 李俊仁（2017）。數學計算障礙的認知分析。載於詹士宜、楊淑蘭（主編），**突破數學學習困難：理論與實務**（19-37

- 頁)。臺北市：心理。
- 孟瑛如、簡吟文 (2014)。由 DSM-5 的改變談學習障礙未來的鑑定與教學輔導趨勢。 *輔導季刊*, **50**(4), 28-34。
- 連文宏、洪麗瑜 (2017)。數學學障與數學合併閱讀障礙國中生計算能力表現之特徵及其差異分析。 *台灣數學教育學刊*, **4**(1), 35-62. doi: 0210.6278/ tjme. 20170317.0
- 鈕文英 (2015)。擁抱個別差異的新典範——融合教育 (第 2 版)。臺北市：心理。
- Fuchs, L. S., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Cirino, P. T., Fletcher, J. M., Fuchs, D., Hamlett, C. L., & Zumeta, R. O. (2009). Remediating number combination and world problem deficits among students with mathematics difficulties a randomized control trial. *Journal of Educational Psychology*, **101**, 561-576.
- Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., & Yao, Y. (1992). Counting knowledge and skill in cognitive addition: A comparison of normal and mathematically disabled children. *Journal of Experimental Child Psychology*, **54**, 372-391.
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, **37**(1), 4-15.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., & Baliey, D. H. (2011). Facts Retrieval Deficits in Low Achieving Children and Children With mathematics learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, **45**(4), 291-307. doi: 10.1177/0022219410392046
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J., & DeSoto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, **88**, 121-151. doi: 10.1016/j.jecp.2004.03.002
- Goldman, S. R., Pellegrino, J. W., & Mertz, D. L. (1988). Extended practice of basic addition facts: Strategy changes in learning-disabled students. *Cognition and Instruction*, **5**(3), 223-265. doi: 10.1207/s1532690xci0503\_2
- Landerl, K., Bevan, A., & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8-9-year-old students. *Cognition*, **93**, 99-125. doi: 10.1016/j.cognition. 2003. 11.004.



# **Reflections on Teaching Students with Mathematics Learning Disabilities Addition Arithmetic Strategies: An Elementary Resource Teacher's Perspective**

Hsiu-Chen Lin

PhD Student

Dept. of Special Education

National University of Tainan

## **Abstract**

It has been found that students with mathematics learning disabilities are different from normal peers in their counting and arithmetic strategies. This article aims to discuss how resource teachers adapt teaching methods to meet the needs of students with mathematics learning disabilities. Several studies have found that first grade students with mathematics learning disabilities have difficulties in retrieving the basic arithmetic facts directly, and do not show adaptive shifts in using strategies or combine multiple strategies as normal peers do. In contrast, they use finger counting strategy to resolve simple addition problems. The author, an experienced elementary resource teacher, developed new teaching methods based on previous studies and her observation in the classrooms. In addition, these methods have also been introduced to general education teachers. Finally, the author suggested that both resource and general education teachers should work together in the best interest of students.

Keywords: mathematics, learning disability, addition, arithmetic strategy