

# 分數的教學和資優兒童

陳 淳

## 一、前 言

如何教資優兒童的數學呢，有些專家建議如下：（註一）

1. 讓小朋友把問題圖解化。
2. 讓小朋友多閱讀參考書。
3. 給小朋友一些問題，這些問題需要小朋友去搜集資料並且要分析這些資料。
4. 發現實際的問題，並且設法去解決。
5. 練習心算、概算。
6. 利用圖表，解決問題。
7. 增加小朋友數學的智識。
8. 把其他科學方面有關問題與數學聯繫起來。
9. 利用數學趣味問題與數學迷題。
10. 幫助學生嘗試各種各類的問題。

也有些專家建議如下：（註二）

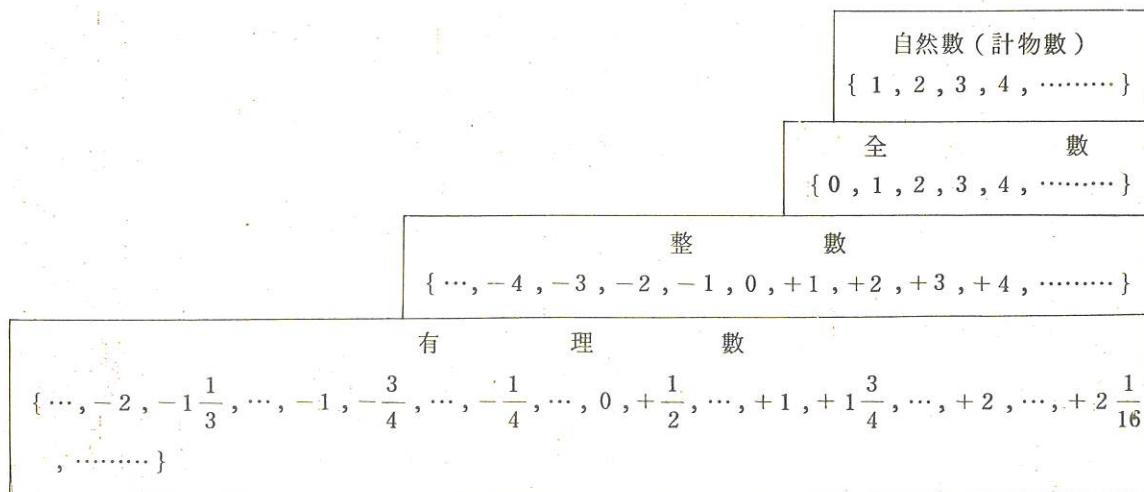
讓資優小朋友學習一些集合、機率方面的課程以及算術法則，所謂算術法則，這裡指的是對自然數系、整數系、有理數系、加法與乘法的交換律、結合律能成立而且乘法對加法的分配律也成立。

在這篇文章裡，儘量利用集合，圖表與算術法則輔導小朋友發現分數的運算的規則與其理由，最後并附有一種特殊的圖表以刺激資優兒童的興趣，也許他們由這些圖表可以想出更多其他有關分數的圖表來。

如果採用本文的教材教學時，不妨先展示圖形或某種模式，老師可藉發問的方式輔導小朋友發現各種數學的性質。

## 二、教 材

在討論分數方面的教材之前，我們先利用以下的圖說明數系發展的情形。



有理數的集合包含自然數、全數、整數、及分數。

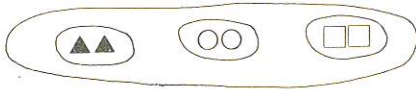
有理數集合是整數集合與分數集合的聯集。

分數可以看成是  $\frac{\text{整數}^*}{\text{自然數}}$ ；分母必須是自然數，也說明了分母不能等於零，否則就是沒有意義了。

\* 把分數寫成  $\frac{a}{b}$  的形式，是 Leonardo Fibonacci (1170-1250) 最先廣泛的使用，但  $a/b$  的形式到 1845 年 Augustus de Morgan (1806-1871) 才提出來的 (註三)。

### 等值的分數

輔導小朋友發現以下的事實：



$\frac{1}{3}$  的東西是黑色的



$\frac{2}{6}$  的東西是黑色的

所以  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$  而  $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$

### 分數的加減

利用集合的方法，輔導小朋友發現以下的事實：



$\frac{1}{3}$  的東西是白色的

$\frac{1}{6}$  的東西是黑色的

那麼  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

有  $\frac{1}{2}$  的東西是白的或者黑的



$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} - \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$

有三分之一的東西是白色的

有四分之一的東西是白色三角形

有  $\frac{1}{12}$  的東西是白色的正方形

讓小朋友自己發現以下的公式：

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}} + \frac{\text{丙}}{\text{丁}} = \frac{\text{甲} \times \text{丁}}{\text{乙} \times \text{丁}} + \frac{\text{乙} \times \text{丙}}{\text{乙} \times \text{丁}} = \frac{\text{甲} \times \text{丁} + \text{乙} \times \text{丙}}{\text{乙} \times \text{丁}}$$

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}} - \frac{\text{丙}}{\text{丁}} = \frac{\text{甲} \times \text{丁}}{\text{乙} \times \text{丁}} - \frac{\text{乙} \times \text{丙}}{\text{乙} \times \text{丁}} = \frac{\text{甲} \times \text{丁} - \text{乙} \times \text{丙}}{\text{乙} \times \text{丁}}$$

利用分數板說明分數的加減法



$\frac{1}{3}$  的東西是黑色的

$\frac{1}{6}$  的東西是黑色三角形

那麼  $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

有  $\frac{1}{6}$  的東西是黑色的圓



$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

$\frac{1}{2}$  的東西是黑色的三角形

$\frac{1}{3}$  的東西是白色的三角形

有  $\frac{5}{6}$  的東西是三角形 (黑色的與白色的三角形)





## 分子都是 1 的分數的相乘

輔導小朋友能利用以下的兩種方法發現  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3 \times 5}$  (其中一種要用結合律)

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{15}$$

$$= \frac{1}{3} \times (3 \times \frac{1}{15})$$

$$= (\frac{1}{3} \times 3) \times \frac{1}{15}$$

$$= 1 \times \frac{1}{15}$$

$$= \frac{1}{15}$$

將  $\frac{1}{5}$  重新命名寫成  $\frac{3}{15}$

將  $\frac{3}{15}$  改寫成乘積

結合性質

$$(\frac{1}{3} \times 3 = \frac{3}{3} = 1)$$

1 的相乘的性質

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{4 \times 5}$$

$$= \frac{1}{4} \times (4 \times \frac{1}{4 \times 5})$$

$$= (\frac{1}{4} \times 4) \times \frac{1}{4 \times 5}$$

$$= 1 \times \frac{1}{4 \times 5}$$

$$= \frac{1}{4 \times 5}$$

這部份最好能由小朋友寫出來。

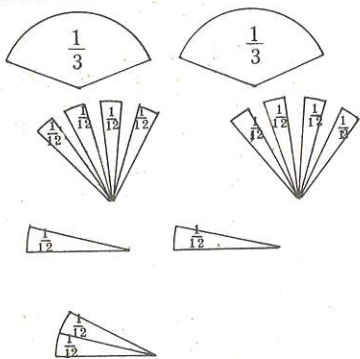
我們也可以用集合來說明：

{ ▲ ▲ ▲ ○ ○ ○ ♣ ♣ ♣ ( ( ( □ □ □ }

五分之一的東西是三角形，三分之一的三角形是黑色的，所以

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \text{ 的東西是黑色三角形}$$

利用分數板及分配律來說明分數的乘法



將每一個  $\frac{1}{3}$  分為 4 等分

取  $\frac{1}{3}$  的  $\frac{1}{4}$  部分

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{2}{12}$$

$$= \frac{1}{6}$$

## 兩個真分數的相乘

輔導小朋友能發現  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

兩個分數相乘時可以演算如下 (其中需利用交換律)：

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = (3 \times \frac{1}{4}) \times (5 \times \frac{1}{7})$$

$$= (3 \times 5) \times (\frac{1}{4} \times \frac{1}{7})$$

$$= (3 \times 5) \times \frac{1}{4 \times 7}$$

$$= \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$$

將  $\frac{3}{4}$  與  $\frac{5}{7}$  改寫成積的形式

交換性

兩個分子為 1 的分數的相乘  
兩整數的乘積為一整數及一  
整數與一分數的相乘

而  $\frac{15}{28} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} \quad \therefore \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$

那麼  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \left( a \times \frac{1}{b} \right) \times \left( c \times \frac{1}{d} \right)$   
 $= (a \times c) \times \left( \frac{1}{b} \times \frac{1}{d} \right)$   
 $= (a \times c) \times \frac{1}{b \times d}$   
 $= \frac{a \times c}{b \times d}$

將  $\frac{a}{b}$  與  $\frac{c}{d}$  改寫成積的形式

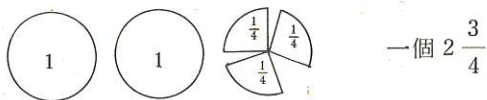
交換性

兩個分子為 1 的分數的相乘  
 兩整數的乘積為一整數及一  
 整數與一分數的相乘

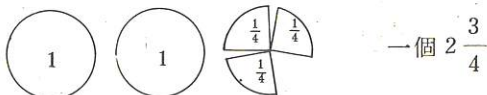
### 用分數板說明分數的乘法

分數板的顯示

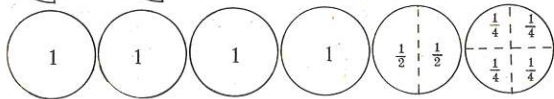
黑板上的計算



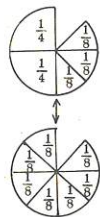
$$2 \frac{3}{4} \times 2 \frac{1}{2} =$$



$$\frac{11}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{55}{8} = 6 \frac{7}{8}$$



合起來是  $6 \frac{7}{8}$



$$7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

### 分數的乘法與機率

甲 = {●, ■}    乙 = {▲, ○, △}

甲 × 乙 = { (●, △), (●, ○), (●, ▲), (■, ▲), (■, ○), (■, △) }

從甲中選到●的機率是  $\frac{1}{2}$

從乙中選到▲的機率是  $\frac{1}{3}$

而從甲 × 乙中選到 (●, ▲) 的機率是  $\frac{1}{6}$

讓小朋友發現  $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

丙 = {方糖, 冰塊}

丁 = {牛奶, 咖啡}

丙 × 丁 = { (方糖, 牛奶), (方糖, 咖啡), (冰塊, 牛奶), (冰塊, 咖啡) }

從丙中選到方糖的機率是  $\frac{1}{2}$

從丁中選到牛奶的機率是  $\frac{1}{2}$

而從丙 × 丁中選到 (方糖, 牛奶) 的機率是  $\frac{1}{4}$

讓小朋友發現  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

輔助小朋友了解某數的  $\frac{1}{\text{某數}}$  與  $\frac{1}{\text{某數}} \times \text{某數}$  及  $\text{某數} \div \text{某數}$  及  $\frac{\text{某數}}{\text{某數}}$  結果都相同

例如  $\left\{ \begin{array}{l} \bigcirc \quad \bullet \\ \bigcirc \quad \bullet \\ \bigcirc \quad \bullet \end{array} \right\}$        $\left\{ \begin{array}{l} \text{DD} \quad \text{DD} \\ \text{DD} \quad \text{DD} \\ \text{DD} \quad \text{DD} \end{array} \right\}$        $\left[ \begin{array}{l} \bigcirc \quad \bigcirc \\ \bigcirc \quad \bigcirc \\ \bigcirc \quad \bigcirc \end{array} \right]$

6 的  $\frac{1}{2}$  是多少       $\frac{1}{2} \times 6$  是多少       $6 \div 2 = ?$

答：3      提示：  $\text{DDDDDD}$        $\frac{6}{2} = ?$   
 或  $\text{DD DD DD}$

讓小朋友發現 6 的  $\frac{1}{2}$  與  $\frac{1}{2} \times 6$ ,  $6 \div 2$  及  $\frac{6}{2}$  結果都相同

### 倒數

$$4 \times \frac{1}{4} = 1 \qquad \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{4 \times 3}{3 \times 4} = \frac{12}{12} = 1$$

$$4 \text{ 與 } \frac{1}{4} \text{ 的乘積為 } 1 \qquad \frac{4}{3} \text{ 與 } \frac{3}{4} \text{ 的乘積為 } 1$$

如果兩數的乘積等於 1 時，這兩數互相稱為倒數，例如

以上  $\frac{1}{4}$  叫做 4 的倒數，4 叫做  $\frac{1}{4}$  的倒數

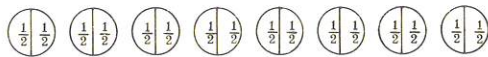
而  $12 \div 3 = 4$

那麼讓小朋友自己發現

$$12 \times \frac{1}{3} = \frac{12 \times 1}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

一數除以 3 相當於乘以 3 的倒數  $\frac{1}{3}$

$$8 \div \frac{1}{2} = 16$$



8 裡有 16 個  $\frac{1}{2}$

一數除以  $\frac{1}{2}$  相當於乘以  $\frac{1}{2}$  的倒數 2

$$8 \times 2 = 16$$

$\frac{\text{某數}}{\text{某數}}$  和  $\text{某數} \div \text{某數}$  是相同的

觀察以下的模式：

被除數	除數	商
192	4	$\frac{192}{4} = 48$
48	4	$\frac{48}{4} = 12$
12	4	$\frac{12}{4} = 3$
3	4	$\frac{3}{4}$

以上數的模式表示  $\frac{3}{4}$  是一個商

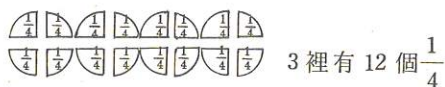
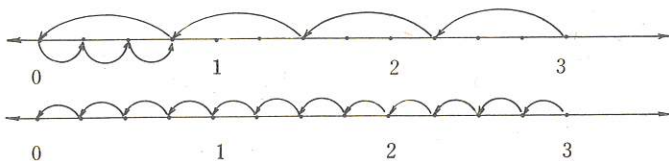
讓小朋友自己發現  $\frac{3}{4}$  和  $3 \div 4$  是相同的

一般來說  $\frac{a}{b}$  和  $a \div b$  是相同的

### 分數的除法

$$3 \div 4 = \frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$$

$$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times 4 = 12$$



讓小朋友發現  $3 \div 4$  與  $3 \times \frac{1}{4}$  相同

而  $3 \div \frac{1}{4}$  與  $3 \times 4$  相同

### 分數與整數相乘及整數除以一分數的情形

觀察以下的模式：

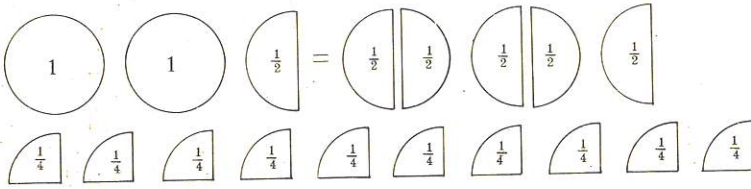
$8 \times 12 = 96$	$16 \div 8 = 2$
$4 \times 12 = 48$	$16 \div 4 = 4$
$2 \times 12 = 24$	$16 \div 2 = 8$
$1 \times 12 = 12$	$16 \div 1 = 16$
$\frac{1}{2} \times 12 = 6$	$16 \div \frac{1}{2} = 32$
$\frac{1}{4} \times 12 = 3$	$16 \div \frac{1}{4} = 64$

讓小朋友觀察以上的模式後，說出觀察後發現了甚麼。

利用分數板來說明分數的除法



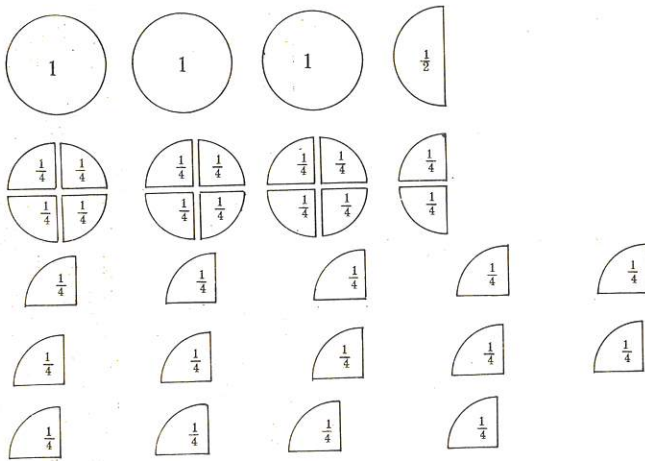
分數板的顯示



在  $2\frac{1}{2}$  中有 10 個  $\frac{1}{4}$

利用分數板來說明分數的除法

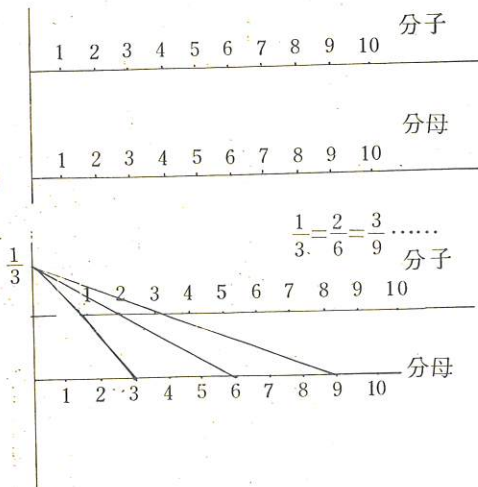
分數板的顯示



$\frac{3}{4}$  的一組     $\frac{3}{4}$  的一組     $\frac{3}{4}$  的一組     $\frac{3}{4}$  的一組     $\frac{3}{4}$  的一組的  $\frac{2}{3} = \frac{3}{4}$  的  $4\frac{2}{3}$  個組

利用比例顯示分數的圖 (註四)

首先從基本的圖開始



這個圖包含三個線段 (或軸) 一個鉛直的線段及二個水平的線段, 上面的線段上所標的數都是用來當分子的, 下面線段上的數都是用來當分母用的。

此圖表示所有的等值分數都交在縱軸上的一點。

黑板上的計算

$$2\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} =$$

$$\frac{5}{2} \div \frac{1}{4} =$$

$$\frac{10}{4} \div \frac{1}{4} = 10$$

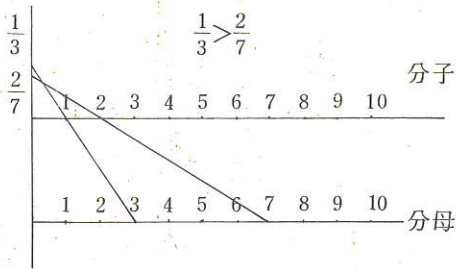
黑板上的計算

$$3\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} =$$

$$\frac{7}{2} \div \frac{3}{4} =$$

$$\frac{14}{4} \div \frac{3}{4} = 4\frac{2}{3}$$

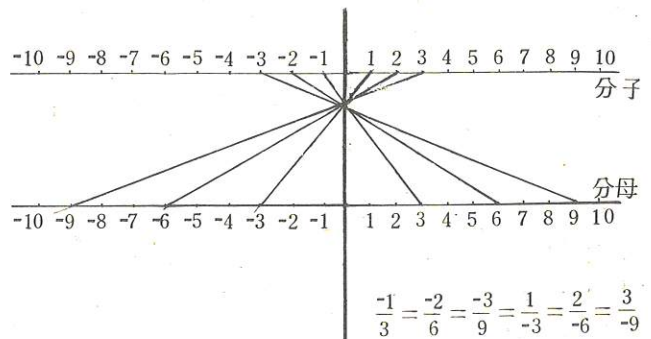
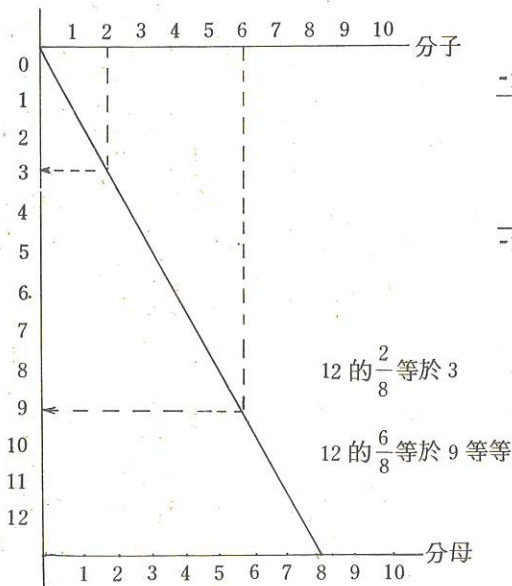
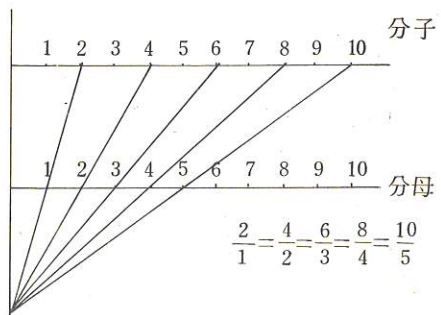
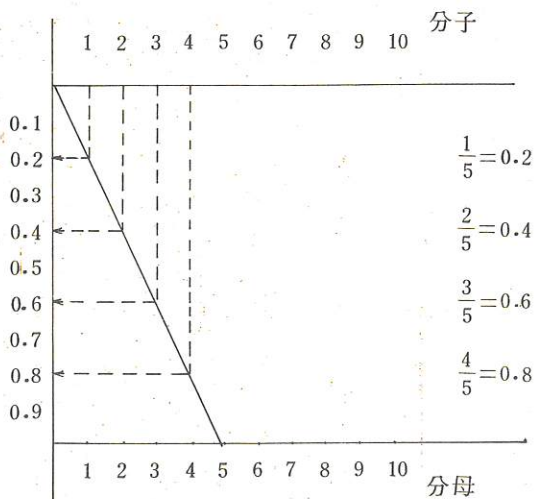


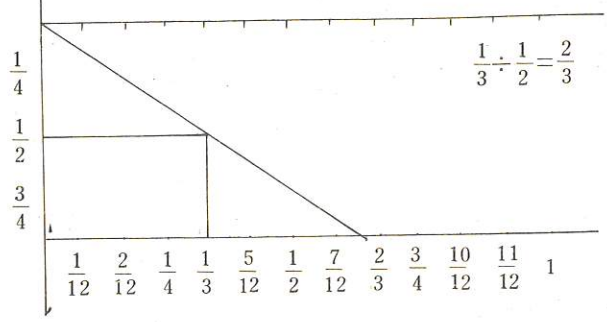
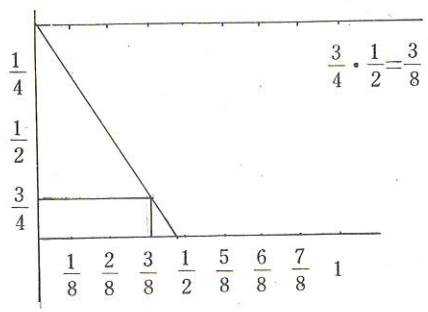
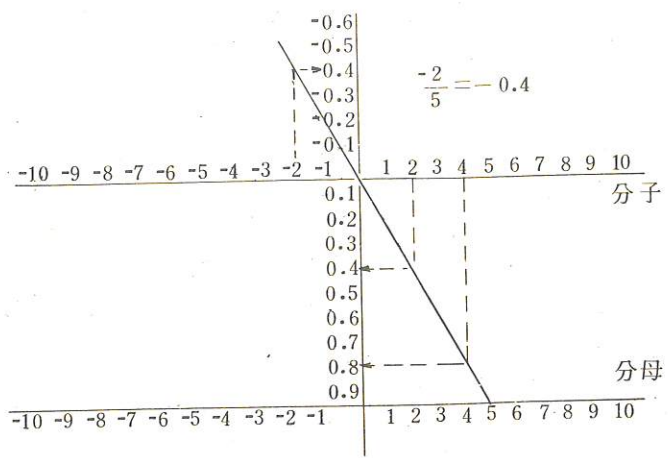
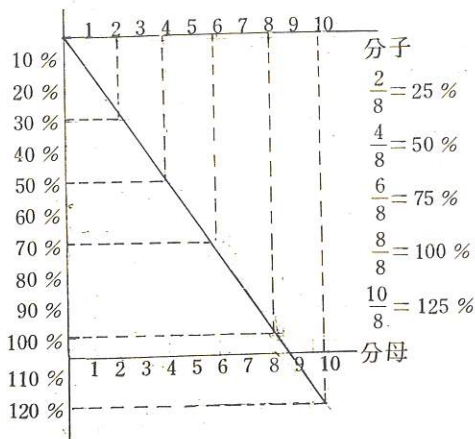


左圖表示  $\frac{1}{3} > \frac{2}{7}$

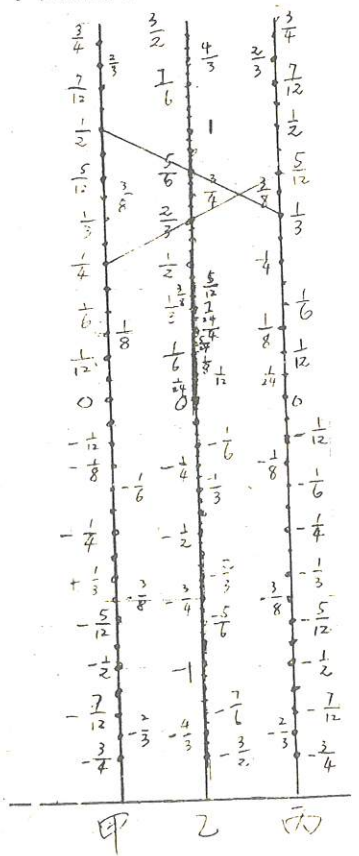
讓小朋友自行發現其他不等的分數並能用如此的圖形表示出來。

以下的各圖可以留給小朋友自己發現其中的關係，並且由觀察這些圖後，小朋友自己更可以創造出許多類似的圖形。





小小遊戲尺



此尺上有三個縱軸，中間軸上每單位長為兩邊軸單位長的一半，但每軸都是以  $\frac{1}{24}$  為一單位，要注意的是：甲、丙軸上的  $\frac{1}{24}$

相當於乙軸的  $\frac{2}{24}$  即  $\frac{1}{12}$ 。

於是若甲軸上的  $\frac{1}{2}$  加丙軸上的  $\frac{1}{3}$  即等於乙軸上的  $\frac{5}{6}$ ，若用乙軸的  $\frac{5}{6}$  減甲軸的  $\frac{1}{3}$ ，則  $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = ?$  這答案如何在甲軸上找到？又

$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = ?$

讓小朋友自行設計各種尺，看看誰做得最好。

### 三、結語

以集合作為教學基礎的開始，比以算術的整數作為數學基礎的開始來得有效，這對教導資優兒童的老師和資優兒童都有幫助（Suppes, 1960）（註五），因此在本文中，很多例題都利用了集合，而介紹分數的乘法與機率時引用了集合的相乘。

本文的內容，所要強調的一點，就是在教學時注重創造性的教學。在每一部份都有圖形，老師可以先問小朋友的問題，讓小朋友由圖形中發現數學的事實，有時候老師先寫出數學的模式，讓小朋友仔細的觀察，再讓他們說出發現了甚麼，並且能創造出甚麼？

在本文裡也實際的學了些例子；利用交換律，結合律和分配律去解分數的問題，這些對資優學生將來學習抽象的數學會有幫助的。

在本文的最後所提出的特殊圖形（利用比例顯示分數），可以供給較大年紀的學生或小學高年班天才學生的參考，讓他們自己再設計很多類似的圖形甚至更複雜而有實用價值的圖形。

至於文內的小小遊戲尺是筆者將 NOMOGRAPH FOR ADDING INTEGERS FROM  $-10$  TO  $+10$ （註六）改寫設計而成。可以讓學生模仿設計各種各樣的尺以增加學習的興趣。

註一：Gertkude H. Hildreth. INTRODUCTION TO THE GIFTED (NEW YORK: McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1966)。P. 260。

註二：盧美貴等譯，資優兒童與各科教學。（台北市：台北市立師範專科學校，民國 72 年）。P. 67。

註三：趙文敏編著，寓數學於遊戲（第二輯）（台北市：九章出版社，民國 70 年）。P. 6。

註四：PETER VINCENT. "A FRACTION DIAGRAM INVESTIGATION", MATHEMATICS IN SCHOOL, NOV. 1981. P. 6。

W.G. Bass and L.J. Godfrey. MATHEMATICS THROUGH ARITHMETIC (Schoolmastes Publishing Company, 1969)

註五：同註二。P. 70。

註六：MAX A. SOBEL AND EVAN M. MALETSKY. DEVELOPING MATHEMATICAL IDEAS (BOSTON: GINN AND COMPANY, 1966)。BOOK 2, P. 240。

#### 參考書

1. ERNEST R. DUNCAN ETC., MODERN SCHOOL MATHEMATICS, STRUCTURE AND USE (BOSTON: HOUGHTON MIFFLIN COMPANY, 1970)。
2. Clyde G. Corle. TEACHING MATHEMATICS IN THE ELEMENTARY SCHOOL (NEW YORK: THE RONALD PRESS COMPANY, 1964)。
3. 國立編輯館，數學科教學研究（台北市：國立編譯館，民國 69 年）。
4. MAX A. SOBEL. DEVELOPING MATHEMATICAL IDEAS (BOSTON: GINN AND COMPANY, 1969)。
5. 安德赫，國民小學數學研習教師手冊（台灣省：台灣省國民學校教師研習會，民國 66 年）。