

身心障礙學生之數學解題

張文奇·林偉仁

前言

在日常生活中，數學是非常重要的部份，包括在家庭、工作場所、社區中的許多情況下都會使用到數學概念及數學技能，例如金錢的處理就是一例。身心障礙者逐漸由封閉的環境走向人群，所以在其日常生活中有很多情況必需使用到數學能力；Gagne（1985）認為數學能力是由計算能力與概念上的理解能力所組成，在日常生活中所遇到的數學問題，通常不會單純只有計算，而是環環相扣的解題歷程，不但要對數學的基本概念有所瞭解，也包括了對問題的理解、推理、監控能力，和正確運算的技能。關於解題（problem solving），Krulik 和 Rudnick（1989）的解釋認為是指個人以其先前所獲得的知識、技能、經驗去處理不熟悉的情境。而 Newell 和 Simon（1972）指出解題是一種目標導向。本文將介紹身心障礙者在數學解題的相關理

論、因素、歷程、特徵、學習策略，期能提供身心障礙者及老師教學的參考。

一、數學解題策略的相關理論

(一)心理計量學：

心理計量學認為所謂數學能力是指在數學測驗上所得的分數，他雖然提供了對數學能力的一種良好說明，但對解題歷程的評量無法單獨測驗，為其缺點（Mayer, 1985）。

(二)行為理論：

行為理論注重 INPUT 與 OUTPUT 間的關係，且特別注重外顯行為的研究，試圖將心理學科學化，認為只有外顯的行為可觀察，而反對問題解題的內在歷程（Quandt, 1986）。行為理論者桑代克（1924）指出學生在數字的學習上，只是學習許多刺激—反應的聯結而已。此一理論在數學學習上最有名的就是編序教學法（programmed instruction, PI）。

(三)心理語言學：

心理語言學強調語言在解題過程的重要角色，探討解題過程中，語言對問題的理解與表徵的影響。

（本文作者為國立彰化師範大學特教系研究生）

四皮亞傑理論：

皮亞傑理論是以兒童發展的觀點，建立人類與環境間互動的模式；以基模理論來說明人類行為的內在結構與發展過程。依皮亞傑理論的觀點，解題者不能解決問題是因為其發展過程尚未達到該階段的原因所致。

五訊息處理理論：

訊息處理理論是把人當作一訊息處理的系統，研究人類如何對訊息的獲得、貯存、與轉移，其基本的元素包括短期記憶、長期記憶、訊息如何在記憶中提取、轉移與貯存，對過程與符號的組型再認（ pattern recognition ）、比較（ comparison ）（ Quandt, 1986 ）。訊息處理理論於 1972 年由 Newell 和 Simon 提出，其主要探究問題解決時，訊息如何被組織（ organized ）、問題在各階段上如何被運作處理。訊息處理理論綜合了上述各理論的優點，其目的不只在研究訊息是如何地被處理，更重要的是在教育上能提供教師對問題解決教學的參考架構，並探討學生在學習上的問題，並作有系統的分析，尋求更有效的解決方法（ Quandt, 1986 ）。

二、與數學解題有關的因素

在數學的解題過程中有許多因素會影響解題的結果，以下指出四種會影響解題的結果的因素（詹士宜，民 79 ）。

（一）問題變項：

問題的內容依其結構有不同的難易程

度，例如在簡單加減的應用問題上，對學生就有不同的難易程度，如：「改變」（ change ）題中「小明有 5 元，小英給小明 3 元，問小明現在有幾元？」；「比較」（ compare ）題中「小英有 3 元，小英比小明少 5 元，問小明有幾元？」；在這兩個問題中，其表徵的結果都是 $5 + 3 = 8$ ，但對兒童來說「比較」題就比「改變」題難很多。另外，對問題語意的描述，也會影響學生在解題的表現，改變問題的敘述型態，學生對問題的理解就不同。

（二）個人變項：

由於個人對該問題領域知識的不同，對於問題解題能力的表現亦不同。此外，解題者在解題時的情意因素亦會對解題者造成影響，如信念、態度、興趣、動機等。

（三）過程變項：

一個問題雖然有相同的答案或結果，但其所需完成的步驟、策略會有不同，例如： $3+5$ ，有些學生數 3（暫停），4，5，6，7，8，答案是 8；有些學生會從大的數字開始數，如 5（暫停），6，7，8，答案是 8。相同的結果但用不同的解題策略，就需使用不同的工作記憶空間。

（四）環境變項：

不同的學習環境中，會產生不同的學習結果。

三、數學解題的歷程

(一) Polya (1945) 數學解題的歷程：

Polya 認為數學解題有四個歷程(1)瞭解問題、(2)擬定計畫、(3)實行計畫、(4)回顧解答(張憶壽, 民 75)。解題者在瞭解問題之後, 便擬定如何解題之計畫, 依此計畫進行解題, 並於獲得答案後再次回顧解題的過程。

(二) Schonfeld (1985) 的認知取向解題歷程模式與相關問題：

Schonfeld 對 Polya 的數學解題歷程加以修正, 提出一種認知取向的解題的歷程模式與相關問題, 他將解題階段分為閱讀、分析、探索、新訊息及局部評估、計畫—執行、驗證、轉移等七個過程, 並在每個解題過程中提出相關問題以協助解題者的認知。

解題階段	說 明	相 關 問 題
閱 讀 (reading)	受試者開始讀問題。	R1 : 是否注意到問題的所有條件? 這些條件明不明確? R2 : 是否正確注意目標狀態? 目標明不明確? R3 : 是否對解題者現有知識與問題的關係評估?
分 析 (analysis)	將問題重新結構, 以更瞭解問題。	A1 : 選擇什麼觀點? 選擇的觀點明不明確? A2 : 是根據問題條件採取行動嗎? A3 : 是根據問題目標採取行動嗎? A4 : 是否考慮條件和目標間的關聯? A5 : 本階段是否連貫而完整? 解題者上述的行為是否合理? 是否需更進一步的給予評論或觀察?
探 索 (exploration)	與分析比較起來, 較無明確的結構, 但具有較大的問題思考空間, 一得到有訊息, 即併入分析—計畫—執行的程序中。	E1 : 本階段的問題是條件導向或目標導向? E2 : 所採行動是直接的嗎? 是否有其目的性? E3 : 有無對解題過程加以檢視? 檢視行為對解題的結果有何影響? E4 : 本階段是否連貫而完整? 解題者上述的行為是否合理? 是否需更進一步的給予評論或觀察?
新訊息及 局部評估	對過去未曾注意的訊息的獲得或重新建構。	解題者對現有知識評估過嗎? 解題者對現有知識評估過嗎? 解題者對新訊息的關聯性與可用性評估過嗎? 評估之有無對解題結果有何影響?
計畫—執行 (planning- implementation)	計畫的結構是否完整? 是否依程序執行? 是否對局部或整體的計畫加以檢視與評估?	PI1 : 是否有明確的計畫? 與問題的目標有關嗎? PI2 : 計畫和問題解決有關嗎? 是否適當? 是否具有良好之結構? PI3 : 解題者是否評估計畫的相關性、適當性及結構性的品質? PI4 : 執行是否依計畫有結構的進行? PI5 : 是否在局部或整體層次評估執行? PI6 : 評估之有無對解題結果有何影響?

轉移 (transition)		V1 : 是否從新檢查解題? V2 : 有無考驗解題? 如何考驗? V3 : 有無歷程及結果的評估? 對結果的信心如何?
驗證 (verification)		T1 : 對解決當前狀態有無評估過? 若放棄一種解決的途徑, 是否利用其中有用的部份? T2 : 如放棄先前所做的, 那有無評估對解題產生局部或整體影響如何? 所採取的行動是否適當而必要? T3 : 是否評估採取新途徑所產生的短程或長程的影響? 問題目標是否能順利的進入到新的研究中? T4 : 採取新途徑後有無評估其對短程或長程的影響? 行動是否必要?

(引自 Schoenfeld, 1985, p297)

(三) Garofalo 和 Lester (1985) 提出認知——後設認知的數學解題模式：

導向	評估與瞭解問題的策略行為	1. 理解策略 2. 評估訊息與條件 3. 評估內容的熟悉性 4. 最初與後續的表徵 5. 評估問題難度與改變完成的方式
組織	計畫行為與選擇行動	1. 確認目標與次目標 2. 整體計畫 3. 局部計畫
執行	調整行為以配合目標	1. 局部行動的完成 2. 檢視局部與整體計畫的進行 3. 決策決定
確認	對決策與計畫執行結果的評估	1. 導向與結構的評估 A. 表徵的適當性 B. 結構決策的適當性 C. 局部計畫與整體計畫的一致性 D. 整體計畫與目標的一致性 2. 執行的評估 A. 行動表現的適當性 B. 對計畫所採行動的適當性 C. 局部結果對計畫與問題條件的一致性 D. 最後結果與問題條件的一致性

(引自 Garofalo, Lester, 1985, p171)

(四) Mayer (1985) 提出的數學解題歷程：

Mayer 將數學解題歷程分為二部份：問題表徵 (problem representation) 與問題解決 (problem solution) ； 在

問題表徵中又可分為問題轉譯 (translation) 與問題整合 (integration) ；問題解決又可分為問題計畫 (planing) 與執行解題 (execution) ，下表為一例：

問題：小英有 5 元，小明比小英多 3 元，問小明有幾元？			
步驟	次 步 驟	知 識 類 型	舉 例
問 題 表 徵	問題轉譯	語言知識	「小明比小英多 3 元」即 $\text{小明} = \text{小英} + 3 \text{元}$ 。
	問題整合	事實知識、基模知識	5 個 1 元 = 1 個 5 元，這是一個「比較」的問題，包括二個子集與一個總集。
問 題 解 決	問題計劃與監控	策略知識	這個問題要用加法來計算。
	執行解題	程序性知識	$3 + 5 = 8$

四、數學學習障礙之特徵

就數學學習障礙之定義而言，意指個體智力正常，但於數學符號運用能力的學習上有困難，致使數學學習能力低下。Johnson 與 Myklebust (1967) 則將數學能力異常區分為三方面，一、運算能力障礙，二、數量思考能力的障礙，三、由語文能力異常而導致的數學能力障礙。關於運算能力中有關數量思考的困難行為特徵如下 (許天威，民 76) ：

- (1) 建立數值的觀念困難。
- (2) 不易瞭解數數的真義。
- (3) 難聯合聽覺的數字概念與視覺的數字符號。

- (4) 分辨基數與序數意義的困難。
- (5) 難把一堆東西經過掃視之後就知道其數量。
- (6) 對數量的保留有困難。
- (7) 運用加減乘除計算的方法感到困難。
- (8) 分辨 $+$ $-$ \times \div 符號及其運算的意義感到困難。
- (9) 由對「為值」概念理解有困難，無法瞭解「變動數字之排列次序必會變動其數值」的概念。
- (10) 難理解或記憶在數學運算時的一些法則。
- (11) 難理解測量的原理。
- (12) 難辨別地圖或其他的圖形指示符號。
- (13) 難運用數學推理來解決數學問題。蔡

宗玖（民 83）綜合國外有關的文獻，以 Mercer（1987）的見解為主要架構，將相關於數學學習障礙在數學學習上的特徵歸納如下：

(一)記憶特徵

1. 短期記憶的能力不足：其範圍包括對數學概念的保存、記住符號的意義、記住計算的原則、步驟和程序等。
2. 長期記憶：學習經過一段時間後，概念遺忘現象嚴重；即刻複習、回憶上課內容有困難；記不住演算的步驟和程序；綜合性的評量成就不佳等。
3. 序列記憶：無法有意義的數數及按順序計數；完成複雜的計算步驟的能力差；對解決複雜的文字題有困難等。

(二)語言能力特徵

1. 接收能力：難瞭解數學專有名詞、字義、文法的意義，例如：加號、減號、被除數等；字彙貧乏且少使用深層的意義；對於瞭解一個字的多種意義有困難等。
2. 表達能力：用口語練習算數或說明解題步驟方面有障礙；數學的語彙不足等。

(三)知覺動作特徵

1. 視聽能力：辨別類似的字形、數字或數學符號有困難；圖形辨識、聽覺順序、形象背景的混淆等。
2. 空間關係：無法明確小數點的位置；計算時位數的對齊的能力差；位值的辨識不易；上下左右前後遠近的分辨困難等。

3. 手眼協調：正確抄寫、繪圖、畫直線、寫數字方面有障礙；難以在指定範圍內寫出適當大小的數字等。

(四)理解能力特徵

瞭解題意有困難，無法將文字的題目轉換為數學算式；難以明白數字及數學符號的意義；很難形成概念及關係等。

(五)推理特徵

一對一的概念差，難以比較大小、數量；量的保留和轉換能力不足；數學抽象思考及運算困難；無法自上下文中瞭解題意；類化應用的能力匱乏；難以選擇正確的計算方法及解題策略等。

(六)動機特徵

缺乏積極的學習態度，較差的自我概念；較依賴外援；較多的學習無助感等。

(七)行為模式特徵

1. 衝動：計算粗心；口頭反應快但不正確；題目沒看完就看其他的題目，無法專心完成一道題目；當被要求回顧檢查所做的運算時，時常更改答案等。
2. 固著：例如，無法由一種計算方式轉換到另一種計算方式。
3. 注意力缺陷：容易分心，很少在指定的時間內完成工作；沒有耐心完成多步驟的計算；精神渙散，一題未完成就著手進行另一題等。

另外董媛卿（民 82）描述數學學習障礙的特徵指出後設認知方面的障礙如下：

1. 由具體到抽象的過程轉換速率慢，依賴具體事物來計算。
2. 將 $+$ $-$ \times \div 的符號當名詞，不知從題目中找出線索或相關字詞。
3. 加減乘除計算沒問題，但無法把數學原理應用在應用問題上。
4. 能算出最後的答案，但不會寫直式或橫式。
5. 看到直式或橫式會計算，卻弄不清楚直式或橫式之間的關係。
6. 認識題目中的字詞及瞭解題中的句意，卻不知如何起頭作答。
7. 不知題目最主要是在問什麼，常給過多的回答。
8. 只會運用一種計算方式，無法轉換其他的計算方式（例如：加法和乘法是互通的）。
9. 不知用何種方法進行自我驗算。
10. 驗算時算出答案不一致，但弄不清楚自己錯在那裡。

五、學習策略與方法

1. 啟發術 (heuristic)：Polya (1945) 提出教師在數學解題的每一步驟過程中提出許多問題，藉一連串的問題以釐清或協助學生對問題的認知，並導引學生對問題的思考。
2. 行為理論策略：
 - 2-1：嘗試錯誤 (trial and error)：藉由嘗試錯誤的學習累積經驗。當學生錯誤解題時，老師並不一定要立即糾正，而讓學生多嘗試幾種方式後再

介入，如此學生可以由嘗試錯誤的過程中累積經驗。

2-2：增強策略：當學生有良好的表現時，適當給予學生正增強。

3. 認知策略：

- ①閱讀：閱讀問題，理解題意。
- ②分析：將問題重新結構，以更瞭解問題。
- ③探索：一得到有訊息，即併入分析—計畫—執行的程序中。
- ④新訊息及局部評估：對過去未曾注意的訊息的獲得或重新建構，使所獲得有關問題的所有資訊與線索不致遺漏。
- ⑤計畫—執行：解題者能認知計畫的結構是否完整？是否依程序執行？是否對局部或整體的計畫加以檢視與評估？
- ⑥驗證：驗算解題是否正確？
- ⑦轉移類化：將解果或同樣的解題方法應用到其他的情境。

4. 後設認知策略：

4-1 監控策略：利用自問自答的方式對原先計畫的解題程序做檢驗。

5. 精熟學習策略：

透過個別化的「回饋—校正」教學活動讓每個學生都能經歷成功的學習經驗。

6. 記憶策略：

6-1 聯想策略：將抽象的數學概念聯想成實物。

6-2 組織策略：以圖示解題。

6-3 口訣：以口訣記憶幫助解題，如：三角形「兩邊和大於第三邊、兩邊差小於第三邊」。

7. 平行替代課程 (PAC)：將課程內容轉成非閱讀形式。如：錄音帶、錄影帶、電影、幻燈片等。其優點在於可適應個別需求的輕度障礙及低成就學生。
8. 合作學習：同儕互相指導以達共同目標。
9. 直接教學：教師藉有計畫、有系統的課程安排來教學生。
10. 電腦輔助：以電腦的高速資料處理之優點分析學生錯誤類型，或可發展編序教學教材。

七、結論：

經由瞭解身心障礙者在數學解題的相關理論、因素、歷程、特徵、學習策略，教師將更能針對學生的學習特徵，應用適當的學習策略來教學，期更能幫助學生回歸社區生活之中。

參考資料

- 許天威 (民 76) 。《學習障礙者之教育》。台北：五南。
- 張憶壽譯 (民 75) (G. Polya, 1945, How to solving)：怎樣解題。台北市：長橋出版社。
- 詹士宜 (民 79) 。《國中智能不足學生數學應用問題解題之研究》。國立彰

化師範大學特殊教育系碩士論文。

董媛卿 (民 82) 。學習障礙學生之補救教學建議，載於董媛卿主編，《如何教育自閉兒》(54-84 頁)。台北：台北市自閉症教育協進會。

蔡宗政 (民 83) 。《國小數學學習障礙學生應用問題解題之研究》。國立彰化師範大學特殊教育系碩士論文。

Gagne, E. D. (1985). *The cognitive psychology of school learning*. Boston: Little, Brown and Company.

Garofalo, J., & Lester, F. K., Jr. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163-176.

Johnson, D. J., & Myklebust, H. R. (1967). *Learning disabilities: Educational principles and practices*. New York: Grune & Stratton.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1989). *Problem solving: A hand book for senior high school teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Mayer, R. E. (1985). Mathematical ability. In Sternberg, R. J.(Ed.). *Human ability: An information processing approach*. 127-150. New York: Freeman.