

# 從教學經驗談估算教學在 仁愛實驗學校的可行性

盧琬貞

## 摘要

學校應教給身心障礙學生將來在成人生活中會用到的數學技能。本文旨在探討估算教學在仁愛實驗學校(招收對象為肢體障礙學生)之可行性,內容先針對何謂估算、估算涉及之數學概念、估算策略及估算教學作介紹,並由研究報告及教學經驗探討影響仁愛學校學生數學學習的因素,最後認為估算教學在仁愛學校是可行的,因此提出下列幾點建議:(1)將估算教學內容鎖定金錢問題;(2)建立適合學生使用的估算策略;(3)以筆算或機算取代心算。

**中文關鍵詞:** 估算、估算教學、肢體障礙、仁愛學校

**英文關鍵詞:** Computational Estimation, Estimation teaching, physical disability, pchjh

## 壹、前言

數學在我們的生活中佔有舉足輕重的地位,不管是生活中、工作上,或在社區中幾乎無時無刻不在影響著我們,因此可以發現數學教學在學校課程中非常重要。數學應是生活化的,其內容應是可在日常生活中可以普遍應用的,對一般人是如此,對身心障礙學生更應如此。很多專家建議學校提供給身心障礙學生的數學課程應符合其成人後之需求,也就是說應教給身心障礙學生將來在成人生活中會用到的數學技能。

我常在想,學習一元一次方程式、二元一次聯立方程式、X、Y 對我目前教導的這些多重障礙的學生到底有何意義?如果可以,我希望能夠教會他們到超市買東西付錢時知道應該拿什麼鈔票付錢,而不是拿出一疊鈔票,讓店員自己拿。他不一定要知道精確的數目,但是知道大概要多少。正好在一篇文章中看到一段

話:「金錢管理、時間、估測及幾何學的概念在一個人的生活中所扮演的角色遠比計算能力重要的多。」(Sedlak & Fitzmaurice, 1981; Serna & Patton, 1993) 其中「估測」(Estimation) 這個名詞引起了我的注意,於是開始搜尋有關「估測」的資料。

在 1955 年時就有學者提出數學老師應該鼓勵並且指導學生發展估測方面的能力,之後許多學者專家也一再提出估測之重要性。美國全國數學教師協會(National Council Teachers of Mathematics, NCTM) 編訂的幼稚園至小學四年級數學課程標準(Curriculum Standards and Evaluation Standards, 1989) 中第五項標準即為估測,其目的在培養學生下面的能力:(1)探索估測所使用的策略。(2)認識何時使用估測是適當的。(3)判定結果的合理性。(4)應用估測於量、實測、計算以及解題中。

估測(Estimation) 可以分成兩類,一類為估算(Computational Estimation),另一類為

估量(Estimating Measures and Estimating Numerosity)。估算可以說是「得到一個計算題的粗略答案的一種過程」,是一種猜出合理近似值的技能。估量則可以定義為「在不使用一般的測量工具的情況下,以某種方法推論出該種度量的一種過程」,例如猜測一張桌子的長度。在我國國小數學課程中,第五冊(國立編譯館,82年改編本)「圓與球」的單元中,指出「圓周的長度大約是直徑的3倍」,這是第一次介紹「大約」的概念,可以算是學生最初有關估算的學習經驗。另外,第八冊(國立編譯館,82年改編本)出現了「概數」的名詞,內容是介紹利用四捨五入法和無條件捨去法來求一整數的概數;第九冊則是利用概數來做四則運算之所謂「概算」。

我國對於估算相關主題的研究並不多,而且研究對象多為普通學生或教師,並未發現有關估算教學在身心障礙學生應用之相關報告或研究,因為有感於身心障礙學生有學習估算技能之必要,所以想由教學經驗探討目前任教之國立彰化仁愛實驗學校(本文簡稱仁愛實校)學生在估算教學之可行性。

## 貳、估算教學

### 一、何謂估算?

估算可以說是「得到一個計算題的粗略答案的一種過程」,是一種猜出合理近似值的技能(支藝君,民85年)。估算具有以下特點:1.是一種快速計算的內在歷程;2.估算的演算過程是粗略但合理的;3.估算通常不藉由任何外在的工具(Reys & Bestgen, 1981; James, 1981; 孟憲騰,民87)。

### 二、估算涉及之數學概念

進行估算時所需要的數學概念及基本知識,有許多學者專家提出其看法,綜合各家所言可整理如下:

(一)心算:心算與估算是不同的,Reys (1985) 即表示:「心算是在沒有任何外在工具(如

紙、筆與計算機)的幫助下,經由心理歷程的運作而計算出正確答案。」由此可知心算所得答案是精確的答案,而估算的過程則是把計算式與數字調整成較易心算的過程,因此心算能力在估算過程中所扮演角色之重要性。另外,林彩鳳(民84年)的研究也顯示,心算的學習經驗可提升國小學童的估算能力。

(二)數感(number sense):數感是根據數字代表不同的意義所產生數的一種直覺。具有數感的人瞭解數字的意義,而且知道如何在生活周遭中使用數字。Bobits(1991)認為在計算前的數感可尋求出數的關係,另外在計算進行之中數感也可以用來監控計算的過程。

(三)位值概念(place value):位值概念是指對數字中各個位數所代表的意義,如4578中的4代表有四個1000,5代表有五個100,……等。

(四)運算式的選擇:這是指遇到問題時會選擇使用四則運算中合適的運算法則。

(五)比較數字大小:指能判斷數與數的相對大小關係。

(六)首位法估算(front end estimate):利用無條件捨去法及四捨五入法,取其首位來代替原值,如31234→30000。

(七)十乘幕的乘法(multiplication by powers of 10):指乘數或被乘數之中一個或二者皆為10、100、1000...或0.01...等。

(八)對乘積的估算(estimating products):這是指利用概算(如首位法)進行乘積的估算,及以過程中整補的方式進行乘積的估算。

(九)對分數的估算(fraction estimators):對分數運算進行估算必須瞭解分數與小數的換算,並且能利用基本知識進行計算,如處理「 $0.2529 \times 400 = ?$ 」就必須知道0.2529約等於 $1/4$ ,所以 $1/4 \times 400 = 100$ 。

(十)辨認不正確的答案(identify incorrect answers):這項技能要能辨認出不合理的答案,如:檢查位數是否正確、首位或末位

乘積之正確性、小數點位數是否正確……。

### 三、估算策略

就估算策略而言，Reys (1982)、Schoen (1981)、林彩鳳 (民 84 年)、支藝君 (民 85 年) 都有相關之探討，歸納整理出常用的估算策略有下面幾種：

#### (一)首位法

首位法是將題目的數值取較為接近的 10 的倍數，而這些 10 的倍數除了最前面的一位外，其餘的位數都以 0 來代表，可用四捨五入法及無條件捨去法。

#### (二)改良制首位法

學生利用首位法求出了近似值，然後與題目的原數值進行比較，然後再將所算出之近似值做一調整，才決定最後的估算值。

#### (三)叢集策略 (clustering)

叢集策略是先觀察算式中的數值接近何種數值，再加以運算，例如：我們在處理「 $3124+2987+3012+2986=$ 」時，發現算式中四個數值均接近 3000，所以我們可以將算式看成  $3000+3000+3000+3000$ ，由此可得答案 12000，或者將其變成  $3000 \times 4 = 12000$ 。

#### (四)相容數字法 (compatible number strategy)

相容數字法是先將算式中的數字處理成較易心算的形式，而這種先前的處理與心算處理的難易有關，相容數字法可在加法與除法中使用。

##### 1. 加法相容法：

例如處理「 $32+46+60+53=$ 」可看做  $32+60=100$ ，而  $46+53=100$ ，所以原式  $=100+100=200$ 。

##### 2. 除法相容法：

這種方法是將除數與被除數改為倍數關係以利處理，例如處理「 $539112 \div 17.8=$ 」時，將 539112 看成 540000，然後將 17.8 看成 18，那麼原式就可改成  $540000 \div 18 = 30000$ 。

#### (五)用高位法估算

利用算式中各數字的最高位數求出近似值的方法。

#### (六)利用手協助估算

在沒有紙筆的情況下，有些學生會使用手指幫忙完成某些計算或是進位。

#### (七)取 5 為近似值

5 為近似值的原則是看到 0、1、2、3 將它捨調取成 0；看到 4、5、6、7 則將之取成近似值 5；而看到 8、9 則將它近位為 10。

#### (八)筆算的方法

進行估算時以筆輔助計算。

#### (九)使用猜的方法

當不方便運用筆算檢查運算結果時，則有些學生會使用「猜」的方法。

### 四、估算教學

估算的教學能提升學生的估算能力，且練習具有相當重要的地位需要 (孟憲騰，民 87)。在估算教學過程中不僅能學到估算技巧，還能有助於位值、數值大小、數的事實概念以及各種運算意義的學習，更能去察覺答案之合理性。但是估算教學卻不能以專章教學的方式出現，因此估算應充分運用在整個數學課程中，以避免侷限於一些則律的生硬學習，反而使學習者無法充分理解，所以在整個教學過程中，教學者應時時鼓勵學生運用估算，以培養其估算能力。

針對估算教學許多學者提出建議，將其整理如下：

1. 建立一些適合學生程度的估算策略，以便進行估算教學。
2. 鼓勵學生討論並且分享經驗，以利學生接觸到不同的估算策略與方法。
3. 對於估算教學的項目進行評鑑，以瞭解學生之進步情形。
4. 教師應激發學生學習估算的動機，並且提供適當安排的課程內容及情境。

(1)廣泛應用學生生活真實經驗進行估算教學，如以日常生活情境為範例。

(2)教師進行估算教學必須強調估算的特殊語言，如大約、大概……等。

(3)教師應接受各種不同可能的估算答案。

(4)教師應在進行估算教學後持續性地指導學生做練習的工作，以便使學生熟悉估算之策略。

由上述之教學建議可發現，教師必須對估算的策略與學生的程度有充分的瞭解，在進行估算教學時，採循序漸進之方式，由具體的生活經驗分享，到抽象策略之發展，讓學習者能實際的應用到日常生活中。

### 參、影響仁愛實驗學校學生數學學習的因素

#### 一、由研究報告看仁愛實校學生之身心特徵

針對仁愛實校學生所做研究並不多見，最近的研究為民國 82 年許天威教授及徐享良教授之「台灣省立彰化仁愛實驗學校教育目標與功能定位之研究」，該研究以仁愛實校 6 至 15 歲學生為研究對象，研究發現：

##### (一)肢體障礙情形

該研究顯示仁愛實校肢體障礙類型之分佈以腦性麻痺學生為主，小兒麻痺學生居次，其障礙類型之轉變，明顯為腦性麻痺學生逐漸取代小兒麻痺學生。而腦性麻痺學生常伴隨語言、聽覺或視覺等附帶障礙，且以語言障礙居多。

##### (二)智力發展狀況

該研究發現腦性麻痺學生中有四分之三以上者有智能不足傾向；其他肢體障礙學生則有五分之一為智能不足，智能中等者有一半以上，且有少數智能優秀者。另外，仁愛實校學生無論語言或非語言分測驗之平均得分均呈普遍低落現象，且腦性麻痺學生之表現均劣於非腦性麻痺學生。

#### 二、由教學經驗談影響仁愛實校學生數學學習的因素

在教學行政上仁愛實校學生常分為甲、乙、丙三類，甲類學生多為智力未受損之學生，

乙、丙類學生多伴隨有智能障礙，但丙類學生通常障礙程度又比乙類學生嚴重。大多數的數學老師會認為甲類學生學習數學並無大問題，只是因其肢體動作較慢而影響其學習速度。然而對乙、丙類學生來說數學是較抽象的，較難以理解的。

根據仁愛實校之數學科教學研究會之記錄，多數數學教師認為影響學生學習數學之因素包括下列幾項：

(一)知覺技能：因為缺乏空間關係、距離、大小關係等知覺能力，妨礙有關測量、估計、問題解決幾何等的學習活動。

(二)智能障礙：缺乏數概念、計算、記憶、推理、思考等能力，都會造成數學學習困難。

1. 推理：推理常需仰賴抽象思考作為基礎，思考能力的低下，會減低推理的能力。

2. 記憶：記憶能力與數學的學習關係密切，對概念與操作經驗的保存，影響很大。

(三)學習的毅力：有些學生缺乏由某些課題或運算轉移至下一問題演算的能力，會阻礙需要多種複雜的問題演算與應用。

(四)語言：學生不識字，或不瞭解某字詞之意義，造成不懂題意，因而影響數學學習。

(五)心理機能：如情緒問題，溝通、注意、辨別等能力的困難，都會影響數學的學習能力。

(六)生理機能：如視、聽、知動的障礙，常會妨礙學生收發訊息，造成學習困難或學習緩慢。

(七)學生的自我概念與信心。

### 肆、估算教學在仁愛實驗學校的可行性

本人認為估算教學在仁愛實校是可行的，但並非全面性的可行，尤其是對於缺乏數感的學生而言，確實有其困難。因此本人對估算教學若在仁愛實校實施提出幾點建議：

### (一)將估算教學內容鎖定金錢問題

學校提供給身心障礙學生的數學課程應符合其成人後之需求，金錢的使用會是在學生未來生活中極為重要的數學活動，本人在教學中發現給學生假鈔進行教學，學生的學習興趣明顯提高不少，因此若以生活中實際的金錢問題作為估算教學的內容將可提升學生之學習動機。

### (二)建立適合學生使用的估算策略

前面介紹過多種估算策略，以仁愛實校多數學生而言，要完全習得是不可能的，因此教師在進行估算教學時，可教導學生多種估算策略，並根據學生學習狀況選擇適合該學生之估算策略，若學生可運用多種策略，則鼓勵學生多方嘗試，若學生只能學會一種策略，就選擇一種來進行教學，以避免發生混淆。

### (三)以筆算或機算取代心算

心算為估算教學的先備技能，然而對於大多數的仁愛實校學生而言，心算屬於高層次的內在歷程，不易達到。若以估算身上所帶的錢是否足夠付款為目的，速度並非重要考量因素，則何妨以筆算或電算機代替心算，一樣達到估算之效果。

(本文作者現為國立彰化師大特教碩士班研究生)

## 參考書目：

- 支藝君 (民 85)。我國國小學生估算概念之研究。台東師院學報，7 期，1-51 頁。
- 孟憲騰 (民 86)。職前教師估算教學策略及估算教學態度之研究。政大教育研究所。
- 林彩鳳 (民 83)。國小學童估算能力及估算策略之分析研究。台中師院初等教育系。
- 國立編譯館主編 (民 82)。國民小學數學課本，第五冊，改編本出版。
- 國立編譯館主編 (民 82)。國民小學數學課本，第八冊，改編本出版。
- 國立編譯館主編 (民 82)。國民小學數學課本，第九冊，改編本出版。
- 許天威、徐享良 (民 82)。台灣省立彰化仁愛實驗學校教育目標與功能訂位之研究。國立彰化師範大學教育學院。
- 許天威、徐享良 (民 82)。腦性麻痺學生學習生活適應之研究。國立彰化師範大學教育學院。
- 陳東陞 (民 81)。國小數學學習困難兒童的教學策略。台北市立師範學院特殊教育中心。
- Polloway, E. A. & Patton, J. R. (1993) *Mathematics, Strategies for teaching learners with special needs*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, Lnc.
- Janeffe F. Bobis. (1991). Using a calculator to develop number sense. *Arithmetic teacher*, 38 (5), 42-45.