

數學障礙之實證本位教學策略

林姿杏

國立臺中教育大學
特殊教育學系助理教授

摘要

為有效提升數學障礙學生的學習成效，實證本位教學(Evidence-Based Practice, EBP)已成為當前特殊教育領域強調的策略。本文基於認知負荷理論(Cognitive Load Theory)及近年實證研究，彙整適用於國中小階段之數學障礙教學策略，包括：(一)明確教學(Explicit Instruction)、(二)多重表徵(Concrete-Representational-Abstract, CRA)、(三)精確數學語言教學(Frayer Organizer、記憶術)、(四)流暢度建立(Cover-Copy-Compare, CCC)，以及(五)問題解決教學(進攻策略、記憶術、鷹架教學)。本文輔以教學實例與圖示說明，提供教師具體可行的步驟，促進其對實證本位教學策略的理解與實踐，進而提升數學障礙學生的學習表現。

關鍵詞：數學障礙、實證本位、教學策略

壹、緒論

約有 5%至 8%的學生具有數學障礙(Shalev, 2007)。根據美國《精神疾病診斷準則手冊第五版修訂》(Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders, Fifth Edition, Text Revision)，數學障礙(mathematics learning disability)被定義為一種神經心理缺陷，其表現包括在數感、算術事實記憶、計算正確性或流暢性，以及數學推理能力等方面出現顯著困難。而影響數

學表現的潛在認知因素，除了與數學學習直接相關的能力之外，亦涵蓋一般性認知功能，如工作記憶與處理速度等，這些因素不僅影響數學學習，也與整體學業表現息息相關(Swanson et al., 2006)。研究指出，工作記憶與數學成就之間具有中度以上的相關性(e.g., Peng et al., 2018)，而在視覺空間處理與語言性工作記憶方面的困難，也常見於數學障礙學生(Swanson et al., 2006)。Geary (2004)根據這些認知特徵，將數學障礙區分為三種亞型：視覺空間困難型、程序困難型，以及語意記憶困難型。近年來，針對數

學障礙的教學介入設計中，認知負荷理論亦被應用與探討（Barbieri & Rodrigues, 2025; Fuchs et al., 2014），以期透過降低不必要的認知負荷，提升學生的學習成效。

認知負荷理論（Cognitive Load Theory）由 John Sweller 於 1980 年代提出，旨在探討人類的認知建構歷程如何影響學習成效。其核心觀點指出：當學習者同時接收到過多或無關資訊，或所執行之任務過於複雜時，將超出其工作記憶的負荷，進而削弱學習成效。該理論最初用於探討學習者工作記憶的限制，並據此發展合適的教學設計與工具。理論認為，部分教學策略與工具之所以無效，乃因其設計未考量新手學習者的認知負荷，導致學習者無法有效建構與內化新知識或基模（Barbieri & Rodrigues, 2025）。此一理論的觀點，與數學障礙學生常見的認知特質——如工作記憶不足、視覺空間處理困難、注意力弱，以及語言處理能力較弱——具有關聯。因此，Barbieri 與 Rodrigues (2025) 建議，發展數學障礙學生的教學介入與策略時，應納入認知負荷理論的觀點。他們更指出，部分現行教學介入雖未明確標示依據認知負荷理論，實際上仍受其理論影響，例如為數學障礙學生延長測驗時間，便是一種隱含地降低認知負荷的策略。

相較於閱讀障礙，數學障礙在研究與實務領域所受到的關注較少（Kaufmann et al., 2013; Watson & Gable, 2013）。Lewis 和 Fisher（2016）針對數學障礙相關研究進行系統性文獻回顧，發現過去 40 年來，研究主題多集中於教學與介入策略。王宣惠與洪

麗瑜（2019）分析 1995 年至 2017 年間的國內研究，亦指出數學障礙相關研究多以教學介入為主，但國內針對數學障礙的實證研究數量極為有限，且缺乏與腦神經科學或核心認知缺陷的整合與探討。而當談及如何協助數學困難學生有效學習時，實證本位教學（Evidence-Based Practice）已被認為是不可或缺的核心元素（Cook et al., 2015）。筆者於國中資源班任教多年，累積近十年的數學教學經驗，觀察到現場教師對於實證本位教學的認知與實務應用普遍不足。隨後，筆者在美國進修期間發現，當地師資培育課程，常強調教師須具備運用實證本位教學的能力，並作為專業教學的基本原則之一。相較之下，我國特殊教育教師對實證本位教學策略的了解與運用，無論是師資生的培訓或在職教師的專業知能，皆仍有進步空間。因此，本文旨在彙整數學障礙學生適用之實證本位教學策略，並說明如何應用於國小至國中階段的數學教學中。期望透過本研究，提升特殊教育教師對實證本位教學的認識與實踐能力，進而強化其教學效能與學生的學習成效。

貳、認知負荷理論

根據 Sweller 等人（2011）所提出的認知負荷理論，學習任務所產生的負荷可分為內在負荷與外在負荷兩類。內在負荷指的是完成任務所必須承擔的負荷，對學習而言至關重要。而學習者處理任務時所需的工作記憶量，取決於資訊本身的複雜程度及其與工

作記憶的關聯性 (Barbieri & Rodrigues, 2025)。若資訊可被單獨理解與學習，則屬於低內在負荷；相對地，若資訊之間高度相互依賴，則構成高內在負荷 (Barbieri & Rodrigues, 2025)。數學學科即屬於高內在負荷的學習活動，因其涉及符號、數字等抽象概念的轉換與整合，且微小的變化（如加減法符號的更動）便可能改變整體運算的意義 (Barbieri & Rodrigues, 2025)。至於外在負荷，則是指非學習本質所需，卻可能分散認知資源的負擔。此類負荷常與教學設計、學習者特質以及學習環境等因素相關，例如：分心的資訊或環境等，應儘可能加以降低，以免干擾學習歷程 (Barbieri & Rodrigues, 2025)。因此，設計學習任務時應著重於減少外在負荷，使學習者能將有限的認知資源有效投入於掌握內在負荷。此原則對於內在負荷本身即較高、學習內容較為複雜的數學學科而言，尤為關鍵 (Barbieri & Rodrigues, 2025)。

數學障礙學生由於工作記憶不足、注意力易分散等認知特質，面對需高認知負荷的數學任務時，可能較難展現良好表現。因此，教師在課程設計與教學策略的選用上，應優先考量學生的認知負荷，並採取經實證支持的有效教學策略，以提升其學習成效。

參、實證本位的數學教學策略

實證本位策略 (Evidence-Based Practice)，或證據本位 (鈕文英, 2010)，係指有實驗研究支持，證實該方法之有效性。

此概念係緣於美國 2001 年《不放棄任何一個孩子法案》(No Child Left Behind Act, NCLB)，強調教育計畫和實務應以「科學研究為基礎」(Scientifically-Based Research, SBR)，才能讓學生獲得良好的教育成效 (鈕文英, 2010)。而所謂的實證研究是指這些研究需符合實驗之先決條件，包含研究設計、質量、數量、效果；實驗方法如準實驗設計、單一受試等皆符合實證研究設計 (Cook & Cook, 2013)。

系統性文獻研究結果指出，有效的數學教學要素有：明確教學、多重表徵、精確語言、流暢度的建立、問題解決教學 (Powell et al., 2021; Powell et al., 2023)。結合前述所提及——認知負荷理論，近年於特殊教育領域越來越多學者提倡，於教學設計時，應考量障礙學生之認知負荷，尤其工作記憶能力對學習之影響 (Barbieri & Rodrigues, 2025)。是故，本文將以有效的數學教學五要素作為基礎，輔以認知負荷理論，介紹數學障礙之教學策略 (What)，並說明如何運用於國民中小學階段 (How)。

一、明確教學

策略一：明確教學法 (Explicit Instruction)

明確教學是一種結構化、系統化的有效教學方式，其課程設計、教學流程皆以清楚且直接的方式教學 (Archer & Hughes, 2011)。此方法已有大量研究支持其有效性，在美國更是有國家研究報告進行長期追蹤證實其效果，且也證實適用身心障礙學生 (Jitendra et al., 2018; Powell et al., 2021)，亦是國家教育科學單位，推薦的高品質實證本

位教學法之一（Barbieri & Rodrigues, 2025）；可調數學障礙教學與介入之核心成份（Jitendra et al., 2018; Powell et al., 2021）。該方法基本要素為：提供清楚的解釋、教師步驟化示範、學生練習的機會、立即且持續的回饋，以及形成性評量（Ketterlin-Geller et al., 2019）。主要流程為（1）預告學生即將學習的內容、（2）對學生示範、（3）跟學生一起做、（4）讓學生嘗試、（5）提供練習。其中，示範（modeling）、練習（practice），可回應學生認知負荷（Barbieri & Rodrigues, 2025; Powell et al., 2023）。此方法與我們熟悉的直接教學法（direct instruction, di）相似，都是教師中心的教學法，有學者認為兩者是同義詞（Powell et al., 2023），也有學者認為不同之處在於，明確教學法強調給予學生較多的彈性與空間，允許學生在學習數學時，能有探索的時間與機會，而非如直接教學法，老師的任何步驟、陳述都必須被寫進教案中（Archer & Hughes, 2011）。該分法可分為三階段：準備（Opening）、發展（Body）、綜合（Closing）：

（一）準備階段

1. 引起注意
2. 陳述目標與重要性
3. 複習先備知識

（二）發展階段

1. 示範（I do；教師示範）
2~3 個模組（正/反面例子）
2. 引導（We do；教師引導學生）
2~3 個例子
3. 練習（You do；學生獨立練習）

2~3 個練習題

（三）綜合階段

1. 複習本次內容
2. 預習下次內容
3. 指派作業

而此教學方法最大的特色在於發展階段時，可分為三小階段：示範（I do）、引導（We do）、練習（You do）。於示範階段（I do），老師先示範所欲學生學習之目標，通常是兩到三次模組的示範（Archer & Hughes, 2011）；教師可利用正面例子與反面例子，幫助學生習得重要概念。於引導階段（We do），由老師跟著學生一起做兩到三個次的模組，強調老師引導、適當予以學生支持（Archer & Hughes, 2011）。最後練習階段（You do），則是讓學生自己做兩到三個練習題目，提示由多至少褪除（Archer & Hughes, 2011）。圖 1 為筆者教導九年級學習障礙學生「平行線截比例線段性質」時所採用之明確教學法。由於篇幅限制，僅呈現其中一個教學模組。圖中呈現了明確教學法的特徵，包括「清晰、結構化的教學流程（I do / We do / You do）、系統化的步驟安排，以及鷹架的支持」（Hughes et al., 2017）。與直接教學法不同之處在於，明確教學法透過明確區分 I do、We do 與 You do，使整體教學流程更具焦點與層次，有助於學生在逐步引導下建構概念並提升學習成效。筆者亦發現，透過「I do / We do / You do」的教學階段，有助於學生掌握學習流程，並降低其在學習抽象概念時所產生的焦慮與困惑。

圖 1

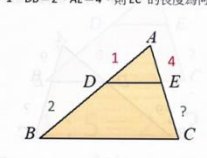
應用明確教學法於國中數學

九上數學

□ 平行線截比例線性質① (I do)

請利用比例特質，算出三角形的邊

1. 若 $AD=1$ 、 $DB=2$ 、 $AE=4$ ，則 EC 的長度為何？



解答

$\because DE \parallel BC$,
 $\therefore AD:DB = AE:EC$,
 $1:2 = 4:EC$,
 $1 \cdot EC = 2 \cdot 4$, 得 $EC=8$

簡單來說，就是

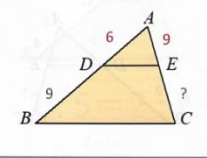
$1:2 = 4:EC$ (x)
 $1x = 2 \cdot 4$
 $x = 8$

九上數學

□ 平行線截比例線性質① Worked Example (We do)

請利用比例特質，算出三角形的邊

2. 若 $AD=6$ 、 $DB=9$ 、 $AE=4$ ，則 EC 的長度為何？



解答

$\because DE \parallel BC$,
 $\therefore AD:DB = AE:EC$,
 $6:9 = 4:EC$,
 $6 \cdot EC = 9 \cdot 4$, 得 $EC=6$

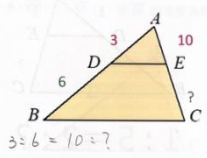
簡單來說，就是

$6:9 = 4:x$
 $6x = 36$
 $x = 6$

九上數學

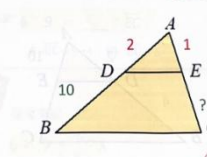
□ 平行線截比例線性質① Worked Example (You do)

5. EC 的長度為何？



$3:6 = 10:?$
 $3x = 60$
 $x = 20$

6. EC 的長度為何？



$2:10 = 1:?$
 $2x = 10$
 $x = 5$

二、多重表徵

策略一：Concrete-Representational-Abstract (CRA)

CRA 是指透過具體、圖像、抽象三階段，循序漸進地教導重要之數學概念。而所謂具體階段即利用具體、可操作(3D)物品，讓學生透過操作了解數學概念。而圖像階段，則是以半具體、圖像呈現數學概念，包含圖表、數線、虛擬(2D)教具；抽象階段則是以數字、文字、符號等表達概念(Fuchs et al., 2021)。已有許多研究證實 CRA 能有效幫助學習障礙、智能障礙學生等學習數學(Bouck et al., 2017; Ebner et al., 2025)。主要步驟如下：

1. 選擇一個數學概念
2. 挑選符合學生認知發展的教具

3. 規劃三個階段，並且注意階段之間的轉換
4. 提供口語示範和視覺呈現，並允許學生問問題
5. 透過具體教具示範，以利了解概念
6. 確保各階段所使用的例子一致或相似

以教導個位數加法為例，於具體階段可準備兩顆糖果和一顆糖果，讓學生能操作物品並做計算。而在圖像階段，教師則可以透過圖片呈現具體階段之內容，如三顆糖果圖案或線條。最後，在抽象階段則是直接以 $2+1=3$ (數學符號) 表示。若以國小分數為例，教師可於具體階段使用實物(3D)、如使用披薩幫助學生了解何謂分數 $2/3$ 。於圖像階段，則是以圖像/圖畫呈現於紙上(2D)，且此時示範的例子最好與具體階段一致。最後，於抽象階段教師可用 $2/3$ 或文字三分之

二呈現之（見圖 2）。

圖 2

應用 CRA 於國小分數

Concrete 具體



Representational 圖像



Abstract 抽象

$$\frac{2}{3}$$

三分之二

此方法對於國中數學障礙學生尤為重要。多數學習障礙學生安置於普通班，而普通班數學課，老師可能受限於時間，大多省略具體操作。因此，對於有概念理解困難之數學障礙生，經常因具體階段之表徵的省略，感到理解困難。倘若特教老師能使用此方法，並從具體階段操作，將有助於學生的理解。試以國中八年級畢氏定理為例，教師

可透過具體的教具使學生明白，畢氏定理公式之由來與其所連結之正方形面積有關。接著，在圖像階段，教師則可以使用三角形與正方形的圖片、或使用電子表徵，如動畫，使學生透過面積的變化，了解公式由來。最後於抽象階段，教師則可直接以 $a^2 + b^2 = c^2$ 表示。學者們亦推薦，可以結合明確教學法：說明、示範、練習概念，CRA 則讓學生可具體操作教具，循序漸進習得抽象數學概念（Ketterlin-Geller et al., 2019）。

而隨著學生年齡的增長，不一定每個數學概念或技能都得從具體階段開始。對於有一定基礎概念的障礙生，可省去具體階段，改以使用虛擬表徵方式，如電腦軟體、iPad 等電子產品呈現教具，替代具體物品操作（Bouck et al., 2018, 2019, 2020; Satsangi et al., 2016），此方法即為所謂 Virtual-Abstract（VA）。

三、精確數學語言

過去，我們將數學與語言獨立教導，較少在數學中，強調語文的重要性。然而，數學此一科目涉及大量語文，如數學題目所包含的文字、數學詞彙、數學符號。在小學、中學階段，學生會學到的數學詞彙超過百過（Powell et al., 2021），且所知道的數學詞彙多寡，與數學表現呈中度以上相關（Lin et al., 2021）。依據美國國家研究組織（2002）對數學能力之定義，其中一項為能使用數學作溝通。而細究數學之概念與程序所涉及之語言，包含數字（如：1）、符號（如：+），以及術語（如：加法），非常多且複雜，因此教導學生數學應視同如學習第二外語

(Hughes et al., 2016)。

在教導學生認識數學詞彙上，美國近幾年來強調老師必須使用精確的語言，以避免學生困惑。最經典的例子即在教導二位數減法時，當個位數為 0 時，我們經常教導學生向十位數「借十/借位」(borrow)。但有些學生會疑惑，「借」了之後，是否該「還」？事實上，正確之語言應為重新組合 (regroup)。另一例子為，在教導分數時，有些老師會把分母以樓下的數字稱之，而分子則以樓上稱之。然而，當學生考試遇到如題目 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{2}{5}$ 之分母最小公倍數時，學生的答案為 1，可能原因為教師未使用分母、分子之正確術語於教學中 (Hughes et al., 2016)。

策略一：Frayer Organizer

而除了使用正確的數學語言外，美國也十分注重教師應花時間在教導數學詞彙。其中，使用圖表組織—Frayer Organizer 即是有效提升數學詞彙之實證本位策略，其內容應包含：定義、特徵、正面例子與反面例子 (Bruun et al., 2015)。圖 3 為使用 Frayer Organizer 教導四邊形定義。筆者曾使用此方法教導學習障礙生數學詞彙—連比例。因學習障礙學生語文能力較弱，通常需要教師協助。筆者建議一開始鼓勵學生試著說出定義為何，再一起翻閱課本找尋該詞彙定義。另外，有些數學詞彙之定義與特徵可能重疊，也需教師加以引導。建議將 Frayer Organizer 作為每一單元的最初活動，以幫助學生對該單元的關鍵詞彙有一定的認識；並於形成性評量時再加入 Frayer Organizer 圖表，藉此瞭

解學生對詞彙的掌握度、強調數學語言的重要性。

圖 3
應用 Frayer Organizer 於國小數學

定義 一個有四條邊、四個頂點、內角和為 360 度的多邊形。	特徵 • 有四個邊 • 邊不一定等長 • 邊不一定平行
正面例子 • 正方形 • 長方形 • 梯形 • 菱形	反面例子 • 圓形 • 三角形 • 五角形 • 十二邊形

策略二：記憶術 (Mnemonics)

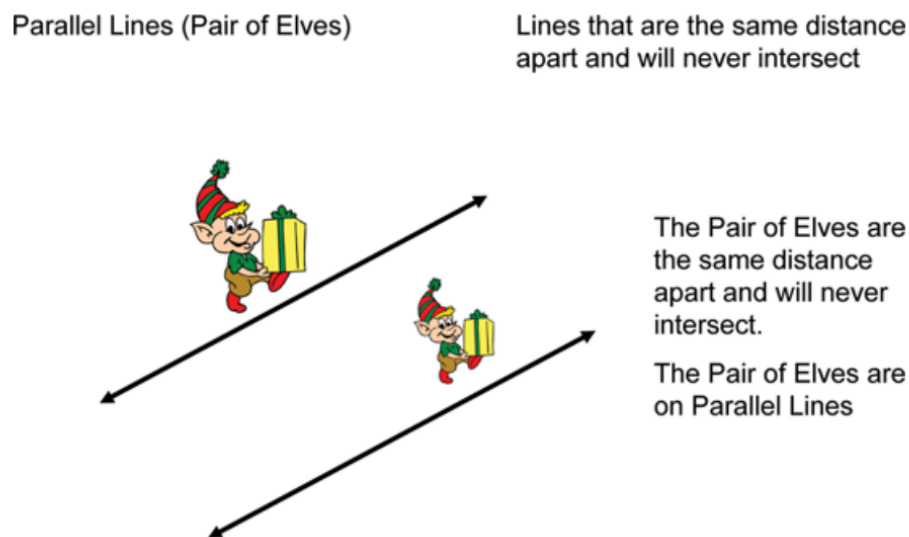
另一教導數學詞彙之方法為：記憶術 (Mnemonics)，指將訊息變得有意義，藉以幫助學生記憶之策略。它用於學習障礙已有 40 年之久，且被證實不但能有效幫助學生理解數學詞彙，也能提升運算、基礎乘法等能力 (Grünke et al., 2023; Irish, 2002; Riccomini et al., 2015)。記憶術類型有三種：關鍵字 (keyword)、字鉤法 (pegword)，以及字母策略 (letter strategies)。其中關鍵字對於學習新詞彙非常有幫助 (Bakken, 2017; Riccomini et al., 2015)。使用此策略時，可用

3 個 R 進行教學設計：(1) **Reconstructing** 重建：創造一個學生熟悉的關鍵詞，以協助建構新詞彙的意義。例如，為幫助學生記住「平行線 (parallel lines)」，可運用諧音關聯「一對小精靈 (pair of elves)」(Bakken, 2017; Riccomini et al., 2015)；或在中文語境中，可使用「平行線沒有香蕉 (相交)」作為記憶輔助語。(2) **Relating** 聯結：是指建立一個圖像，呈現關鍵詞與其定義之間的互動關

係。此種視覺化方式能強化學生對詞彙意義的理解與記憶（如圖 4；Bakken, 2017）。(3) **Retrieval** 提取：引導學生回憶先前建立的關鍵詞及其所對應的圖像或諧音。例如，教師可與學生一同複習助記語：「一對小精靈 (pair of elves) 永遠不會相交」，以幫助記住「平行線」(parallel lines) 的定義 (Bakken, 2017; Riccomini et al., 2015)。

圖 4

應用記憶術之關鍵字策略於數學詞彙



註：Adapted From “The language of mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary,” by P. J., Riccomini, G. W. Smith, E. M. Hughes, & K. M. Fries, 2015, *Reading & Writing Quarterly*, 31(3), p. 243. (<https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995>)

四、建立流暢度

由 DSM-5-TR 診斷準則可發現，對數學障礙之判定，強調數學表現之正確率 (accuracy) 與流暢度 (fluency)。依據行為學習階段而言，在學生習得 (acquisition) 行

為/概念階段後，即進入下一階段：流暢度，亦即能正確且快速地算數學 (鈕文英，2022)。而美國數學障礙流暢度的研究，大多以四則運算為主，方法為要求學生反覆背誦，以幫助其記憶數學事實。最簡易之方式

為教師使用閃示卡（flash card）幫助學生記憶數學事實（Morano, 2019），如九九乘法表、數字家族等。

策略一：Cover-Copy-Compare（CCC）

提升數學事實之實證本位策略有：Cover-Copy-Compare（以下簡稱 CCC）（Stocker & Kubina, 2017）、Taped Problems（Kleinert et al., 2018）、Incremental Rehearsal

（Burns et al., 2019）。於此，我們介紹 CCC 方法，如圖 5 所呈現，教師可以選取幾個數學事實放置 A4 紙之最左邊。第一步驟為 Cover—蓋住題目，第二步驟為 Copy—拷貝題目並作答，最後一步則是 Compare—比較所寫的答案是否正確。透過反覆的練習，使學生能記憶基礎之數學事實，並促進自動化以降低工作記憶負擔。

圖 5

應用 CCC 於國小數學

姓名：

Cover, Copy, and Compare

①	$\begin{array}{r} 7 \\ \times 9 \\ \hline 63 \end{array}$	第一次	第二次
②	$\begin{array}{r} 6 \\ \times 8 \\ \hline 48 \end{array}$	第一次	第二次
③	$\begin{array}{r} 3 \\ \times 7 \\ \hline 21 \end{array}$	第一次	第二次
④	$\begin{array}{r} 2 \\ \times 8 \\ \hline 16 \end{array}$	第一次	第二次
⑤	$\begin{array}{r} 9 \\ \times 5 \\ \hline 45 \end{array}$	第一次	第二次

對摺線

就認知負荷理論而言，建立數學流暢度能幫助學生最終達成自動化，方能減少對認知的負荷。試想，一位數學障礙生於基礎四則運算有困難，如基本加法無法自動提取事實時，每次遇到基礎計算都須再次計算（例如：使用手指頭計算），則此舉會消耗學生之認知資源。是故，數學障礙領域有相當大比例的研究，旨在驗證能有效提升學生流暢度之教學策略（Lewis & Fisher, 2016）。而在資源班或特教班的數學教學，特教老師所使用的方法大多與流暢度較相關，如字卡配對、小組競賽解題（大富翁、桌遊）等（Morano, 2019）。然為幫助學生能將習得之概念／技能應用類化，除建立流暢度的教學方法外，促進更高階的行為學習方法也十分重要。

五、問題解決

根據行為學習階段，在流暢階段後，尚有精熟（proficiency）、維持（maintenance）、類化（generalization）、調整（adaptation）。而其中，對於身心障礙學生而言，如何將所習得之概念／技能類化至不同情境等，較為挑戰。在數學，應用問題是一需要學生將所學過的技能與概念類化至不同的題目，卻也是許多數學障礙生感到困難的。而教導解決應用問題之教學策略有：基模（Schema）教學與進攻（Attack）策略（Powell et al., 2023）。所謂的基模教學是指，教導學生能分辨應用問題之類型（例如：加法、減法等），進而使用相對應之運算，而非僅依靠題目之關鍵字（如：看到剩下，使用減法）。而進攻策略是一種步驟化的教學策略，它可幫助學生解決各種不同類型的應用問題。此

策略通常需要學生於解題過程中使用自我監控，一步一步遵照步驟解題（Powell et al., 2023）；且需要選擇好記的字眼，與記憶術有異曲同工之妙。

策略一：記憶術（Mnemonics）

如前面所述，記憶術也包含字母策略（letter strategies），其又可分為藏頭詩（acrostics）和縮寫（acronyms; Bakken, 2017），適用於教導應用問題之步驟。而所謂的藏頭詩，即所使用之記憶資訊是一有意思的句子，例如 RUN 策略，即 Read the problem 讀題目、Underline the question 劃線、Name the problem type 命名題目類型。另一方式為縮寫，通常使用字母之字首為代號，但組成之字母沒有任何意思，例如：用以記住長除法之順序 DMSBR：Divide、Multiply、Subtract、Bring down、Remainder/Repeat。而不論是藏頭詩或是縮寫，目的皆是透過將訊息調整為方便記憶，幫助學習者快速提取記憶，並減少認知負荷（Putnam, 2015）。

策略二：鷹架式教學法

（Instructional Scaffolding）

另一適用於應用問題之教學策略為鷹架式教學法（Instructional Scaffolding），強調教師於學習過程中，提供支持（鷹架），以幫助學生習得重要知識與技能、減少學生認知負荷。而當學生精熟該技能後，教師則逐漸褪除支持，最終讓學生獨立表現技能（Aditi, 2017）。該方法可分為工作（task）、材料（material）、內容（content）三種形式，各針對不同的長期記憶類型（The IRIS

Center, 2005)。

(一) 工作式鷹架：旨在教導程序性知識。將工作步驟化。藉由教師示範步驟，並於過程中放聲思考、說明各步驟(The IRIS Center, 2005)。以數學應用題為例，可將解題步驟化，例如拆解成四個步驟：

步驟一、讀題目；步驟二為圈關鍵字；步驟三為畫圖表示題目；步驟四則為計算，似我們熟悉的工作分析。以國中數學為例，圖 6 為使用工作式鷹架教學於九年級數學單元連比例，將所需之解題步驟列出，以供學生參考。

圖 6

應用工作式鷹架教學於國中數學

九上數學

由兩個比求連比 2 (You do)

1. 設 $x:y=4:5$, $x:z=6:7$, 求 $x:y:z$ 。

提示

步驟 1. 先寫連比例 $x:y:z$

步驟 2. 抄數字

步驟 3. 比一比

Handwritten work showing the solution:

$$\begin{array}{l} x:y=4:5 \\ x:z=6:7 \end{array}$$

4 2 5
6 2 7

$4 \times 6 = 24$ $5 \times 6 = 30$ $7 \times 4 = 28$
 $6 \times 4 = 24$ $6 \times 5 = 30$

$\therefore 24:30:28$
 $12:15:14$

(二) 材料式鷹架：主要以程序性、條件性知識為主。此方法為利用文字等提示幫助學生執行任務，這些提示能減少學生困惑以及認知負荷。如圖 7，在真分數加法學習單上，提供通分等完整步驟給學生作為提示。而當學生已精熟該技能或

策略時，提示與線索則褪除(The IRIS Center, 2005)。

圖 7

應用材料式鷹架教學於國小數學

例題：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

第 1 題.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} =$$

第 2 題.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} =$$

第 3 題.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$$

第 4 題.

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} =$$

(三) 內容式鷹架：主要以陳述性、條件性知識為主，教師可從簡單、學生熟悉的內容開始教導一個新的技能（The IRIS Center, 2005）。此鷹架之目的為幫助學生理解題目結構。而當學生已對該題目

結構熟悉後，教師可擴展例子之範圍

（例如題目數字變難）。此策略大略可分為四階段，各階段之主要內涵為：

1. 第一階段：將應用題問號改成句號，並把答案寫進題目裡，且提供全部支持。
2. 第二階段：題目仍以句號(陳述句)呈現，且提供比第一階段較少的提示。
3. 第三階段：將問號放回題目，並持續褪除支持。
4. 第四階段：完全褪除支持，讓學生獨立完成題目。

此類型鷹架強調過程中之支持應逐步減少，最後應讓學生嘗試自己練習。圖 8 為應用內容式鷹架教學於國小數學之例子。此策略透過提供鷹架，讓學生能減少認知負荷，並將資源分配至需要專注的概念。如階段一，透過提供學生答案與算式，免去學生耗費過多時間於閱讀、理解題目等，而是將認知資源運用在熟悉題目結構。待學生對題目結構之熟識後，再褪除部分提示，將責任逐漸移至學生，漸漸增加學生認知負荷。

圖 8

內容式鷹架教學於國小數學之例子

階段一

爸爸買了 5 瓶可樂，每瓶可樂 35 元，爸爸總共要付 175 元。

公式：瓶數 × 每瓶價錢 = 全部價錢

$$5 \times 35 = 175$$

階段二

爸爸買了 5 瓶可樂，每瓶可樂 35 元，爸爸總共要付 175 元。

公式：瓶數 × 每瓶價錢 = 全部價錢

換你算

階段三

爸爸買了 5 瓶可樂，每瓶可樂 35 元，爸爸要付多少元？

公式：瓶數 × 每瓶價錢 =

換你算

階段四

爸爸買了 5 瓶可樂，每瓶可樂 35 元，爸爸要付多少元？

換你算

肆、結論與建議

本文探討數學障礙領域中常見的實證本位教學策略，並結合認知負荷理論作為教

學設計與介入的理論基礎，是國內首篇較全面性地彙整數學障礙實證本位教學之研究（見附錄）。此外，本文亦提出具體可行的教學步驟，供國中小實務現場參考。綜合上述，以下為本文之結論與建議。

- 一、融合認知負荷理論以回應學生學習特性：數學障礙學生因其特有的認知特質—工作記憶限制等，在數學學習歷程中面臨諸多挑戰，涵蓋概念理解、語言運用、推理能力與問題解決等面向。因此，在進行教學或介入時，應充分考量學生的認知負荷，確保所採策略能有效運用其有限的認知資源。而本文所介紹的策略，多具有重複練習、結構化呈現與認知支持等特性，能有效減輕學生的認知負荷、提升數學理解與問題解決能力。
- 二、實證研究本土化：如同王宣惠與洪麗瑜所指出，我國關於數學障礙之實證本位教學策略的研究相當稀少，且現有研究多集中於直接教學法相關領域。期盼本文能達拋磚引玉效果，促使更多學者關注並探究本土之實證本位教學策略，進一步於國內教育情境中加以實證，驗證其成效與對我國特殊教育體系之適切性。
- 三、提升教師專業以落實有效教學：實證本位教學策略的有效實施，有賴於第一線教師具備相應之專業知能與教學素養。然而，現階段我國特殊教育教師在數學實證教學方面之專業培育相對不足。因此，建議於師資培育階段強化相關知能、加強對現職教師的支持，透過工作坊、教學觀課與專業學習社群等方式，進行持續性的職前與在職培訓，協助教師掌握數學障礙學生之學習特徵與有效的教學策略。

參考文獻

- 王宣惠、洪麗瑜（2019）。我們真的認識數學障礙嗎？—臺灣數學障礙 20 年研究回顧與問題探究。**特殊教育研究學刊**，**44**（1），59-90。https://doi.org/10.6172/BSE.201903_44(1).0003
- 鈕文英（2010）。特殊教育證據本位實務之建立、鑑識與運用。**南屏特殊教育**，1，1-24。
- 鈕文英（2022）。正向行為支持的理論與實務（第3版）。心理。
- Aditi, B. (2017). Effect of instructional scaffolding on high school students' academic achievement and attitude towards science. *International Journal of Science Technology and Management*, 6(3), 228-235.
- Archer, A. L., & Hughes, C. A. (2011). *Explicit instruction: Effective and efficient teaching*. Guilford Press.
- Bakken, J. P. (2017). Mnemonic strategies: Helping students with intellectual and developmental disabilities remember important information. *Global Journal of Intellectual & Developmental Disabilities*, 2(3), 1-4. https://doi.org/10.19080/GJIDD.2017.02.555587
- Barbieri, C. A., & Rodrigues, J. (2025). Leveraging cognitive load theory to support students with mathematics difficulty. *Educational Psychologist*,

- 60(3). Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/00461520.2025.2486138>
- Bouck, E. C., Park, J., Cwiakala, K., & Whorley, A. (2020). Learning fraction concepts through the virtual-abstract instructional sequence. *Journal of Behavioral Education*, 29(3), 519-542. <https://doi.org/10.1007/s10864-019-09334-9>
- Bouck, E. C., Park, J., Satsangi, R., Cwiakala, K., & Levy, K. (2019). Using the virtual-abstract instructional sequence to support acquisition of algebra. *Journal of Special Education Technology*, 34(4), 253-268. <https://doi.org/10.1177/0162643419833022>
- Bouck, E. C., Park, J., Shurr, J., Bassette, L., & Whorley, A. (2018). Using the virtual-representational-sbstrack approach to support students with intellectual disability in mathematics. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, 33(4), 237-248. <https://doi.org/10.1177/1088357618755696>
- Bouck, E. C., Park, J., & Nickell, B. (2017). Using the concrete-representational-abstract approach to support students with intellectual disability to solve change-making problems. *Research in Developmental Disabilities*, 60, 24-36. <https://doi.org/10.1016/j.ridd.2016.11.006>
- Bruun, F., Diaz, J. M., & Dykes, V. J. (2015). The language of mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 21(9), 530-536. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.21.9.0530>
- Burns, M. K., Aguilar, L. N., Young, H., Preast, J. L., Taylor, C. N., & Walsh, A. D. (2019). Comparing the effects of incremental rehearsal and traditional drill on retention of mathematics facts and predicting the effects with memory. *School Psychology*, 34(5), 521-530. <https://doi.org/10.1037/spq0000312>
- Cook, B. G., & Cook, S. C. (2013). Unraveling evidence-based practices in special education. *The Journal of Special Education*, 47(2), 71-82. <https://doi.org/10.1177/0022466911420877>
- Cook, B. G., Buysse, V., Klingner, J., Landrum, T. J., McWilliam, R. A., Tankersley, M., & Test, D. W. (2015). CEC's standards for classifying the evidence base of practices in special education. *Remedial and Special Education*, 36(4), 220-234. <https://doi.org/10.1177/0741932514557271>
- Ebner, S., MacDonald, M. K., Grekov, P., & Aspiranti, K. B. (2025). A meta-analytic review of the concrete-representational-abstract math approach. *Learning Disabilities Research and Practice*, 40(1), 31-42. <https://doi.org/10.1177/09388982241292299>

- Fuchs, L. S., Newman-Gonchar, R., Schumacher, R., Dougherty, B., Bucka, N., Karp, K. S., Woodward, J., Clarke, B., Jordan, N. C., Gersten, R., Jayanthi, M., Keating, B., & Morgan, S. (2021). *Assisting students struggling with mathematics: Intervention in the elementary grades*. (WWC 2021006). National Center for Education Evaluation and Regional Assistance (NCEE), Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. <https://ies.ed.gov/ncee/wwc/PracticeGuide/26/Published>
- Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Sterba, S. K., Long, J., Namkung, J., Malone, A., Hamlett, C. L., Jordan, N. C., Gersten, R., Siegler, R. S., & Changas, P. (2014). Does working memory moderate the effects of fraction intervention? An aptitude-treatment interaction. *Journal of Educational Psychology*, 106(2), 499-514. <https://doi.org/10.1037/a0034341>
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities: International perspectives on mathematics and LD. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15. <https://doi.org/10.1177/00222194040370010201>
- Grünke, M., Müllerke, N., Karnes, J., Duchaine, E. L., & Barwasser, A. (2023). Effects of musical mnemonics on the division skills of students with math difficulties. *International Journal of Special Education*, 38(2), 102-112.
- Hughes, C. A., Morris, J. R., Therrien, W. J., & Benson, S. K. (2017). Explicit instruction: Historical and contemporary contexts. *Learning Disabilities Research and Practice*, 32(3), 140-148. <https://doi.org/10.1111/ldrp.12142>
- Hughes, E. M., Powell, S. R., & Stevens, E. A. (2016). Supporting clear and concise mathematics language: Instead of that, say this. *Teaching Exceptional Children*, 49(1), 7-17. <https://doi.org/10.1177/0040059916654901>
- Irish, C. (2002). Using peg- and keyword mnemonics and computer-assisted instruction to enhance basic multiplication performance in elementary students with learning and cognitive disabilities. *Journal of Special Education Technology*, 17(4), 29-40. <https://doi.org/10.1177/016264340201700403>
- Jitendra, A. K., Lein, A. E., Im, S. H., Alghamdi, A. A., Hefte, S. B., & Mouanoutoua, J. (2018). Mathematical interventions for secondary students with learning disabilities and mathematics difficulties: A meta-analysis. *Exceptional Children*, 84(2), 177-196. <https://doi.org/10.1177/0014402917737467>
- Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R.

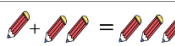
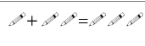
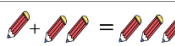
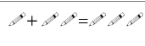
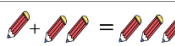
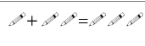
- H., Henik, A., Jordan, N. C., Karmiloff-Smith, A. D., Kucian, K., Rubinsten, O., Szucs, D., Shalev, R., & Nuerk, H.-C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology*, 4, Article 516. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00516>
- Ketterlin-Geller, L. R., Powell, S. R., Chard, D., & Perry, L. (2019). *Teaching math in middle school: Using MTSS to meet all students' needs*. Paul H. Brookes Publishing Co.
- Kleinert, W. L., Gould, K., Coddling, R. S., & Minami, T. (2018). A meta-analysis of the taped problems intervention. *Journal of Behavioral Education*, 27(1), 53-80. <https://doi.org/10.1007/s10864-017-9284-5>
- Lewis, K. E., & Fisher, M. B. (2016). Taking stock of 40 years of research on mathematical learning disability: Methodological issues and future directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(4), 338-371. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.4.0338>
- Lin, X., Peng, P., & Zeng, J. (2021). Understanding the relation between mathematics vocabulary and mathematics performance: A meta-analysis. *The Elementary School Journal*, 121(3), 504-540. <https://doi.org/10.1086/712504>
- Morano, S. (2019). Retrieval practice for retention and transfer. *TEACHING Exceptional Children*, 51(6), 436-444. <https://doi.org/10.1177/0040059919847210>
- National Research Council. (2002). *Helping children learn mathematics*. The National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/10434>
- Peng, P., Wang, C., & Namkung, J. (2018). Understanding the cognition related to mathematics difficulties: A meta-analysis on the cognitive deficit profiles and the bottleneck theory. *Review of Educational Research*, 88(3), 434-476. <https://doi.org/10.3102/0034654317753350>
- Powell, S. R., Bouck, E. C., Sutherland, M., Clarke, B., Arsenault, T. L., & Freeman-Green, S. (2023). Essential components of math instruction. *Teaching Exceptional Children*, 56(1), 14-24. <https://doi.org/10.1177/00400599221125892>
- Powell, S. R., Mason, E. N., Bos, S. E., Hirt, S., Ketterlin-Geller, L. R., & Lembke, E. S. (2021). A systematic review of mathematics interventions for middle-school students experiencing mathematics difficulty. *Learning Disabilities Research and Practice*, 36(4), 295-329. <https://doi.org/10.1111/ldrp.>

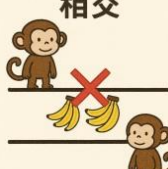
- Putnam, A. L. (2015). Mnemonics in education: Current research and applications. *Translational Issues in Psychological Science*, 1(2), 130-139. <https://doi.org/10.1037/tps0000023>
- Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The language of mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, 31(3), 235-252. <https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995>
- Satsangi, R., Bouck, E. C., Taber-Doughty, T., Bofferding, L., & Roberts, C. A. (2016). Comparing the effectiveness of virtual and concrete manipulatives to teach algebra to secondary students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 39(4), 240-253. <https://doi.org/10.1177/0731948716649754>
- Shalev, R. S. (2007). Prevalence of developmental dyscalculia. In D. B. Berch, & M. M. M. Mazzocco (Eds.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (pp. 49-60). Paul H. Brookes.
- Stocker, J. D., & Kubina, R. M. (2017). Impact of cover, copy, and compare on fluency outcomes for students with disabilities and math deficits: A review of the literature. *Preventing School Failure*, 61(1), 56-68. <https://doi.org/10.1080/1045988X.2016.1196643>
- Swanson, H. L., Howard, C. B., & Saez, L. (2006). Do different components of working memory underlie different subgroups of reading disabilities? *Journal of Learning Disabilities*, 39(3), 252-269. <https://doi.org/10.1177/00222194060390030501>
- Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). Measuring cognitive load. In J. Sweller, P. Ayres, & S. Kalyuga (Eds.), *Cognitive load theory* (pp. 71-85). Springer.
- The IRIS Center (2005). *Providing instructional supports: Facilitating mastery of new skills*. <https://iris.peabody.vanderbilt.edu/module/sca/>
- Watson, S. M. R., & Gable, R. A. (2013). Unraveling the complex nature of mathematics learning disability: Implications for research and practice. *Learning Disability Quarterly*, 36(3), 178-187. <https://doi.org/10.1177/0731948712461489>

附錄

數學障礙之實證本位教學策略

數學概念（習得）	教學策略	內涵	範例			
	明確教學法（Explicit Instruction）	1. I do（教師示範） 2. We do（教師引導學生練習） 3. You do（學生獨立練習）	1. I do. 「請看老師怎麼做： $2x = 8$ 」 2. We do. 「我們一起來做這題： $3x = 9$ 」 3. You do. 「現在換你們試試看： $5x = 10$ 」			
	圖表組織（Frayer Organizer）	1. 定義 2. 特徵 3. 正例 4. 反例	<table><tr><td>定義 一個有四條邊、四個頂點、內角和為 360 度的多邊形。</td><td>特徵 • 有四個邊 • 邊不一定等長 • 邊不一定平行 </td></tr><tr><td>正面例子 • 正方形 • 長方形 • 梯形 • 菱形 </td><td>反面例子 • 圓形 • 三角形 • 五角形 • 十二邊形 </td></tr></table>	定義 一個有四條邊、四個頂點、內角和為 360 度的多邊形。	特徵 • 有四個邊 • 邊不一定等長 • 邊不一定平行	正面例子 • 正方形 • 長方形 • 梯形 • 菱形
定義 一個有四條邊、四個頂點、內角和為 360 度的多邊形。	特徵 • 有四個邊 • 邊不一定等長 • 邊不一定平行					
正面例子 • 正方形 • 長方形 • 梯形 • 菱形	反面例子 • 圓形 • 三角形 • 五角形 • 十二邊形					

多元表徵（Concrete-Representational-Abstract, CRA）	1. Concrete: 操作具體教具 2. Representational: 使用圖像呈現 3. Abstract: 以數字、符號呈現題目	<table><tr><th>Concrete</th><th>Representational</th><th>Abstract</th></tr><tr><td>具體</td><td>表徵</td><td>抽象</td></tr><tr><td></td><td></td><td>$1 + 2 = 3$</td></tr></table>	Concrete	Representational	Abstract	具體	表徵	抽象			$1 + 2 = 3$
Concrete	Representational	Abstract									
具體	表徵	抽象									
		$1 + 2 = 3$									

記憶術：關鍵字（Mnemonic s- Keyword）	平行線沒有相交 
------------------------------	--

數學	策略	內涵	範例
概念 (流暢)	Cover, Copy, & Compare (CCC)	1. Cover：記憶完蓋住題目 2. Copy：抄寫題目 3. Compare：比較答案是否一致	參考圖 5
數學 概念 (類化)	進攻策略；記憶術 (Attack Strategy; Mnemonics)	使用簡單好記的字，步驟化過程。	Read the problem Underline the keywords Name the problem type
	記憶術：字母策略 (Mnemonics-Letter Strategies)	藏頭詩：字母組合成一個有意義的字 縮寫：字母組合沒有意義	計算乘法公式 99^2 1. 拆數字： $(100-1)^2$ 2. 找 a,b：100 是 a, 1 是 b 3. 代公式： $a^2 - 2ab + b^2$
	任務式鷹架教學 (Instructional Scaffolding- Task)	將解題過程完整呈現	例題： $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} - \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{5}{6}$
	內容式鷹架教學 (Instructional Scaffolding-Content)	1. 將應用題問號改成句號，把答案寫進題目裡，且提供全部支持。 2. 題目以句號（陳述句）呈現，提供較少的提示。 3. 問號放回題目，並持續褪除支持。 4. 完全褪除支持，讓學生獨立完成。	參考圖 8

Evidence-Based Instructional Strategies for Students with Mathematics Learning Disabilities

Tzu-Hsing Lin

Assistant Professor,
Department of Special Education,
National Taichung University of Education

Abstract

To effectively enhance the learning outcomes of students with mathematics learning disabilities, Evidence-Based Practice (EBP) has become a widely emphasized approach in the field of special education. Grounded in cognitive load theory and recent empirical research, this article synthesizes instructional strategies suitable for elementary and middle school students with mathematics learning disabilities. These strategies include: (1) Explicit Instruction, (2) Concrete-Representational-Abstract (CRA), (3) Precise Mathematical Language Instruction (e.g., Frayer Organizer, mnemonics), (4) Building Fluency (e.g., Cover-Copy-Compare, CCC), and (5) Problem-Solving Instruction (e.g., attack strategies, mnemonics, scaffolding). The paper incorporates teaching examples and visual illustrations to provide teachers with practical and actionable steps, thereby enhancing their understanding and implementation of evidence-based strategies and ultimately improving the learning performance of students with mathematics learning disabilities.

Keywords: Mathematics Learning Disabilities, Evidence-Based Practice, Teaching Strategies

